Un integrale definito

Sia da calcolare

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

Soluzione

Definiamo la funzione dipendente da un parametro α

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx$$

Calcoliamone la variazione rispetto al parametro:

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{d}{d\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx$$

La derivata sotto il segno di integrale è semplice:

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} = \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}$$

L'integrando è ora una funzione razionale, che si integra elementarmente previa scomposizione in fratti semplici, infatti è

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)} = \frac{-\alpha}{1+\alpha^2}\frac{1}{1+\alpha x} + \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)(1+x^2)} + \frac{x}{(1+\alpha^2)(1+x^2)}$$

Le primitive sono rispettivamente il logaritmo, l'arco tangente e di nuovo il logaritmo, di modo che

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}\,dx = -\frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)}\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2(1+\alpha^2)}$$

Quindi

$$\frac{d}{d\alpha}I(\alpha) = -\frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)}\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2(1+\alpha^2)}$$

Abbiamo ottenuto una equazione differenziale per $I(\alpha)$. Per ottenere la funzione $I(\alpha)$ basta integrare tra gli estremi 0 e 1

$$I(1) - I(0) = -\int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}d\alpha + \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\alpha}{1+\alpha^2}d\alpha + \int_0^1 \frac{\ln 2}{2(1+\alpha^2)}d\alpha$$

Ora è $I(1) = I$; $I(0) = 0$; mentre il primo integrale a secondo membro è proprio I per cui

$$I = -I + \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\alpha}{1+\alpha^2}d\alpha + \frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2}d\alpha$$

I due integrali rimanenti sono immediati: le loro primitive sono di nuovo il logaritmo e l'arco tangente:

$$2I = \frac{\pi}{4}\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2}{2}\frac{\pi}{4}$$

ed infine

$$I = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

vale a dire

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

che è il risultato cercato.

Un corollario del risultato principale si ottiene integrando per parti:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \ln(1+x)\arctan x\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\,dx$$

per cui

$$\frac{\pi}{8}\ln 2 = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\,dx$$

e

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

Impiegando invece il numeratore come fattore integrante:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \left.\frac{(x+1)[\ln(1+x)-1]}{1+x^2}\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{2x\,(x+1)[\ln(1+x)-1]}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\frac{\pi}{8}\ln 2 = \ln 2 + 2\int_0^1 \frac{x\,(x+1)[\ln(1+x)-1]}{(1+x^2)^2}\,dx$$

e

$$\int_0^1 \frac{x\,(x+1)[\ln(1+x)-1]}{(1+x^2)^2}\,dx = \left(\frac{\pi}{8}-1\right)\frac{\ln 2}{2}$$