Vedere il cielo con chiarezza

È stato visto altrove[1] che, grazie al metodo di telescopizzazione, è possibile calcolare serie dall'aspetto molto ostiche. Il metodo principe è costituito dalla scomposizione in fratti semplici del termine generico, composto almeno dal prodotto di due fattori. Si ottengono in genere fratti con segni differenti tra loro che quindi è possibile elidere a coppie o terne o *n*-ple. Ciò è possibile sia direttamente che con l'ausilio di opportuni coefficienti.

Ad esempio è stato trovato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)[(1+x)+nx]} = \frac{1}{x(1+x)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)[(1+x)+nx][(1+2x)+nx]} = \frac{1}{2x(1+x)(1+2x)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)[(1+x)+nx][(1+2x)+nx][(1+3x)+nx]} = \frac{1}{3x(1+x)(1+2x)(1+3x)}$$

In quel luogo ci fermammo a questo punto. Eulerianamente la regolarità del comportamento ci invita a confidare che l'andamento prosegua altrettanto regolarmente. Se chiamiamo σ_p la tipologia di somma suddetta il cui temine generico ha p fattori $(1+tx)+nx \;\; [t=0,\dots.p-1]$ allora

$$\sigma_0 - \sigma_1 = \frac{1+4x}{1\cdot 2x(1+x)(1+2x)}$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1+9x}{2\cdot 3x(1+x)(1+2x)(1+3x)}$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \frac{1+16x}{3\cdot 4x(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)}$$

$$\sigma_3 - \sigma_4 = \frac{1+25x}{4\cdot 5x(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+5x)}$$

$$\dots$$

$$\sigma_p - \sigma_{p+1} = \frac{1+(p+2)^2x}{(p+1)(p+2)x(1+x)(1+2x)\dots[1+(p+2)x]}$$

[1] Vol. 9.18

Ad esempio

$$\sigma_7 = \frac{1}{6x(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+5x)(1+6x)}$$

Attualizzando a $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)(5+n)(6+n)(7+n)} = \frac{1}{6.2.3.4.5.6.7} = \frac{1}{6 \cdot 7!}$$

Le strade per la generalizzazione sono due: variazioni al numeratore (I) e al denominatore (II) e la combinazione dei due (III).

Nel primo caso studiamo la famiglia di serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^t}{(1+nx)[(1+x)+nx]\dots[(1+kx)+nx]} = \sigma_{k,t} \qquad (t < k)$$

La più semplice è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+nx)[(1+x)+nx][(1+2x)+nx]} = \sigma_{2,1}$$

L'espressione è l'unica convergente, assumendo potenze intere positive. La sua scomposizione in fratti semplici dà per il termine generale

$$\frac{n}{(1+nx)[(1+x)+nx][(1+2x)+nx]} = \frac{n}{2x^2(1+nx)} - \frac{n}{x^2(1+x+nx)} + \frac{n}{2x^2(1+2x+nx)}$$

Si tratta ora di sommare pazientemente ma facilmente i vari termini

$n = 1$: $\frac{1}{2x^2(1+x)} - \frac{1}{x^2(1+2x)} + \frac{1}{2x^2(1+3x)}$

$n = 2$: $\frac{2}{2x^2(1+2x)} - \frac{2}{x^2(1+3x)} + \frac{2}{2x^2(1+4x)}$

$n = 3$: $\frac{3}{2x^2(1+3x)} - \frac{3}{x^2(1+4x)} + \frac{3}{2x^2(1+5x)}$

$n = 4$: $\frac{4}{2x^2(1+4x)} - \frac{4}{x^2(1+5x)} + \frac{4}{2x^2(1+6x)}$

$n = 5$: $\frac{5}{2x^2(1+5x)} - \frac{5}{x^2(1+6x)} + \frac{5}{2x^2(1+7x)}$

A parte i primi tre termini, abbiamo sempre una tripletta di numeri con la struttura

$$\frac{n-2}{2x^2(1+nx)}-\frac{2n-2}{2x^2(1+nx)}+\frac{n}{2x^2(1+nx)}=0$$

che si elidono quindi tutti: restano pertanto solo i primi tre termini, dei quali il secondo e il terzo si elidono ancora, per cui

$$\sigma_{2,1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+nx)[(1+x)+nx][(1+2x)+nx]}=\frac{1}{2x^2(1+x)}$$

che, apparendomi notevole, può essere specializzato a vari casi:

$$\sigma_{2,1}(-3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)(3n+2)(3n+5)}=\frac{1}{36}$$

$$\sigma_{2,1}(-2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{8}$$

$$\sigma_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{1}{3}$$

$$\sigma_{2,1}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=4$$

In generale, se $t>0$, allora

$$\sigma_{2,1}(-t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(tn-1)(tn+p-1)(tn+2t-1)}=\frac{1}{2t^2(t-1)}$$

Se $x=\phi$ allora $\sigma_{2,1}(\phi)=\frac{\Phi}{2}$, se $x=\Phi=\frac{1}{\phi}$ allora $\sigma_{2,1}(\Phi)=1-\frac{3\phi}{2}$.

Nel caso del prodotto di 4 denominatori abbiamo due possibilità:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+nx)[(1+x)+nx][(1+2x)+nx][(1+3x)+nx]}=\sigma_{3,1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+nx)[(1+x)+nx][(1+2x)+nx][(1+3x)+nx]}=\sigma_{3,2}$$

La scomposizione in fratti semplici nel primo caso dà

$$\sigma_{3,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6x^3(1+nx)} - \frac{n}{2x^3(1+x+nx)} + \frac{n}{2x^3(1+2x+nx)} - \frac{n}{6x^3(1+3x+nx)}$$

Dobbiamo di nuovo sommare i primi termini:

$n = 1$: $\frac{1}{6x^3(1+x)} - \frac{3}{6x^3(1+2x)} + \frac{3}{6x^3(1+3x)} - \frac{1}{6x^3(1+4x)}$

$n = 2$: $\frac{2}{6x^3(1+2x)} - \frac{6}{6x^3(1+3x)} + \frac{6}{6x^3(1+4x)} - \frac{2}{6x^3(1+5x)}$

$n = 3$: $\frac{3}{6x^3(1+3x)} - \frac{9}{6x^3(1+4x)} + \frac{9}{6x^3(1+5x)} - \frac{3}{6x^3(1+6x)}$

$n = 4$: $\frac{4}{6x^3(1+4x)} - \frac{12}{6x^3(1+5x)} + \frac{12}{6x^3(1+6x)} - \frac{4}{6x^3(1+7x)}$

$n = 5$: $\frac{5}{6x^3(1+5x)} - \frac{15}{6x^3(1+6x)} + \frac{15}{6x^3(1+7x)} - \frac{5}{6x^3(1+8x)}$

Non si elidono solo i primi 6 termini, per cui la somma dei termini residui è

$$\sigma_{3,1} = \frac{1}{6x^3(1+x)} - \frac{1}{6x^3(1+2x)}$$

e infine

$$\sigma_{3,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+nx)[(1+x)+nx][(1+2x)+nx][(1+3x)+nx]} = \frac{1}{6x^2(1+x)(1+2x)}$$

Ad esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)} = \frac{1}{36}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+2n)(3+2n)(5+2n)(7+2n)} = \frac{1}{360}$$

Nel secondo caso, come vedremo poi più in generale, abbiamo che

$$\sigma_{3,2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+nx)[(1+x)+nx][(1+2x)+nx][(1+3x)+nx]} = \frac{3x+2}{6x^3(1+x)(1+2x)}$$

Ad esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)} = \frac{5}{36}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+2n)(3+2n)(5+2n)(7+2n)} = \frac{1}{90}$$

Il modello di comportamento appare chiaro e possiamo quindi calcolare tutte le somme $\sigma_{k,t}$. I coefficienti dei numeratori n^t sono costituiti dai coefficienti binomiali a segno alterno $\binom{k}{s}$; i denominatori sono formati dal prodotto di $k!\,x^k$ per i termini $(1+rx)+nx$ $(r = 1, 2, \dots, k)$.

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per effettuare le somme telescopiche:

- $t = 0$

  Immediato:

$$\sigma_{k,0} = \frac{1}{(k-1)x(1+x)(1+2x)\dots[1+(k-1)x]}$$

- $t = 1$

$n = 1$: $\frac{\binom{k}{0}}{k!x^k(1+x)} - \frac{\binom{k}{1}}{k!x^k(1+2x)} + \frac{\binom{k}{2}}{k!x^k(1+3x)} - \frac{\binom{k}{3}}{k!x^k(1+4x)} + \frac{\binom{k}{4}}{k!x^k(1+5x)} \dots$

$n = 2$: $\frac{2\binom{k}{0}}{k!x^k(1+2x)} - \frac{2\binom{k}{1}}{k!x^k(1+3x)} + \frac{2\binom{k}{2}}{k!x^k(1+4x)} - \frac{2\binom{k}{3}}{k!x^k(1+5x)} + \frac{2\binom{k}{4}}{k!x^k(1+6x)} \dots$

$n = 3$: $\frac{3\binom{k}{0}}{k!x^k(1+3x)} - \frac{3\binom{k}{1}}{k!x^k(1+4x)} + \frac{3\binom{k}{2}}{k!x^k(1+5x)} - \frac{3\binom{k}{3}}{k!x^k(1+6x)} + \cdots$

$n = 4$: $\frac{4\binom{k}{0}}{k!x^k(1+4x)} - \frac{4\binom{k}{1}}{k!x^k(1+5x)} + \frac{4\binom{k}{2}}{k!x^k(1+6x)} - \cdots$

$n = 5$: $\frac{5\binom{k}{0}}{k!x^k(1+5x)} - \frac{5\binom{k}{1}}{k!x^k(1+6x)} + \frac{5\binom{k}{2}}{k!x^k(1+7x)} \dots$

Dal momento che k è un numero intero finito, avremo in verticale somme parziali solo fino a $n = k$, per tutte le successive, i termini si elidono, per cui rimane un numero di termini pari al triangolare T_k ossia $\frac{k(k+1)}{2}$ termini, che è la somma dei primi k naturali:

$$\sigma_{k,1} = \frac{\binom{k}{0}}{k!\,x^k(1+x)}$$

$$-\frac{\binom{k}{1}}{k!\,x^k(1+2x)} + \frac{2\binom{k}{0}}{k!\,x^k(1+2x)}$$

$$+\frac{\binom{k}{2}}{k!\,x^k(1+3x)} - \frac{2\binom{k}{1}}{k!\,x^k(1+3x)} + \frac{3\binom{k}{0}}{k!\,x^k(1+3x)}$$

$$\dots$$

Sommando in tal modo restano $k-1$ addendi il cui numeratore è di nuovo la serie dei coefficienti binomiali a segno alterno, il denominatore la successione già vista. Alla fine

$$\sigma_{k,1} = \frac{1}{(k-1)kx^2(1+x)(1+2x)\dots[1+(k-1)x]}$$

- $t = 2$

$n = 1$: $\frac{\binom{k}{0}}{k!x^k(1+x)} - \frac{\binom{k}{1}}{k!x^k(1+2x)} + \frac{\binom{k}{2}}{k!x^k(1+3x)} - \frac{\binom{k}{3}}{k!x^k(1+4x)} + \frac{\binom{k}{4}}{k!x^k(1+5x)} \dots$

$n = 2$: $\frac{2^2\binom{k}{0}}{k!x^k(1+2x)} - \frac{2^2\binom{k}{1}}{k!x^k(1+3x)} + \frac{2^2\binom{k}{2}}{k!x^k(1+4x)} - \frac{2^2\binom{k}{3}}{k!x^k(1+5x)} + \frac{2^2\binom{k}{4}}{k!x^k(1+6x)} \dots$

$n = 3$: $\frac{3^2\binom{k}{0}}{k!x^k(1+3x)} - \frac{3^2\binom{k}{1}}{k!x^k(1+4x)} + \frac{3^2\binom{k}{2}}{k!x^k(1+5x)} - \frac{3^2\binom{k}{3}}{k!x^k(1+6x)} + \cdots$

Il numero di addendi residui resta il medesimo, cambiano solo i coefficienti; il comportamento della somma cambia a seconda della parità di k.

Per $k = 2u$ manca il denominatore centrale:

$$\sigma_{2u,2} = \frac{1}{2p_1p_2p_3\dots p_m x^3(1+x)(1+2x)\dots[1+(k-2)x][1+(k-1)x]}$$

Per $k = 2w + 1$ non manca alcun denominatore mentre il numeratore presenta anche il termine lineare:

$$\sigma_{2w+1,2} = \frac{(2w+1)x + 2}{2p_1p_2p_3 \dots p_m x^2(1+x)(1+2x) \dots [1+(k-1)x]}$$

I p_m sono numeri primi.

- $t = 3$

Lo schema è il medesimo, la somma dei coefficienti dei fratti finali è sempre nulla. L'intervento dei cubi complica solo il numeratore. Due soli esempi:

$$\sigma_{6,3} = \frac{7x^2 + 6x + 1}{60x^4(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+5x)}$$

$$\sigma_{7,3} = \frac{28x^2 + 21x + 1}{420x^4(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+5x)(1+6x)}$$

Non presenta particolari difficoltà il calcolo di somme nelle quali il denominatore assume andamenti meno regolari.

Ad esempio sia da calcolare

$$\sigma(p,q;x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)[(1+px)+nx][(1+qx)+nx]}$$

La scomposizione in fratti semplici dà

$$\sigma(p,q;x) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{pq(1+nx)} - \frac{1}{p(q-p)[(1+px)+nx]} + \frac{1}{q(q-p)[(1+qx)+nx]}$$

Sommiamo i primi termini:

$n = 1$: $\frac{1}{pqx^2(1+x)} - \frac{1}{p(q-p)x^2(1+(1+p)x)} + \frac{1}{q(q-p)x^2(1+(1+q)x)}$

$n = 2$: $\frac{1}{pqx^2(1+2x)} - \frac{1}{p(q-p)x^2(1+(2+p)x)} + \frac{1}{q(q-p)x^2(1+(2+q)x)}$

$n = 3$: $\frac{1}{pqx^2(1+3x)} - \frac{1}{p(q-p)x^2(1+(3+p)x)} + \frac{1}{q(q-p)x^2(1+(3+q)x)}$

$n = 4$: $\frac{1}{pqx^2(1+4x)} - \frac{1}{p(q-p)x^2(1+(4+p)x)} + \frac{1}{q(q-p)x^2(1+(4+q)x)}$

$n = 5$: $\frac{1}{pqx^2(1+5x)} - \frac{1}{p(q-p)x^2(1+(5+p)x)} + \frac{1}{q(q-p)x^2(1+(5+q)x)}$

La faccenda si complica, ovviamente, perché i denominatori in genere non si elidono.

Osserviamo le varie colonne. Se vogliamo che la terza sommi a zero allora dobbiamo necessariamente avere $1 + q = 2 + p = 3$ e ricadiamo nel caso già visto $p = 1, q = 2$. Guardiamo allora la quarta colonna, la cui somma è

$$\frac{1}{q(q-p)x^2(1+(2+q)x)} - \frac{1}{p(q-p)x^2(1+(3+p)x)} + \frac{1}{pqx^2(1+4x)}$$

L'annullarsi di essa richiede una delle due condizioni: $p = q = 0$ oppure $p = 2, q = 0$.

Nel primo caso avremo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)^3}$$

La somma di questa serie è nota:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)^3} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log^2 z\, dz}{1-z^x} - 1$$

Nel secondo caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)^2[(1+2x)+nx]} = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 \frac{z^{2xy}\log^2 z\, dzdy}{1-z^x}$$

che possiamo, come nel primo caso, solo tabulare numericamente.

Sia ora da calcolare

$$\sigma(a,b;x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)[a+(n+1)x][a+(n+2)x]}$$

Posto

$$w = 2(a+1)x^2 + (a+1)(3a-1)x + a^2(a-1)$$

la scomposizione in fratti semplici dà

$$\sigma(a,b;x) = \frac{1}{w}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a+1}{1+nx} + \frac{a-1}{a+(n+1)x} - \frac{3a-1}{a+(n+2)x}$$

Sommiamo i primi termini:

$n = 1$: $\frac{a+1}{1+x} + \frac{a-1}{a+2x} - \frac{3a-1}{a+3x}$

$n = 2$: $\frac{a+1}{1+2x} + \frac{a-1}{a+3x} - \frac{3a-1}{a+4x}$

$n = 3$: $\frac{a+1}{1+3x} + \frac{a-1}{a+4x} - \frac{3a-1}{a+5x}$

...

La condizione di annullamento della somme sulla terza colonna richiede $a = 1$ oppure $a = 3x$. Ma le somme delle altre colonne non si annullano, per cui la serie non è in realtà effettivamente telescopica.