Una continuità di frazioni circolari

Sappiamo da Lambert[1] che

$$\tan\varphi = \cfrac{\varphi}{1 - \cfrac{\varphi^2}{3 - \cfrac{\varphi^2}{5 - \cfrac{\varphi^2}{\dots - \cfrac{\varphi^2}{2k + 1 - \cfrac{\varphi^2}{2k + 3 - \cdots}}}}}} \qquad [1]$$

Si può facilmente far andare la fantasia specializzando la grandezza φ tanto che ponendo $\varphi = 1$ otteniamo la quantità trascendente

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{\dots - \cfrac{1}{2k + 1 - \cfrac{1}{2k + 3 - \cdots}}}}}} = \tan 1 \approx 1{,}557407724655\ldots$$

Se ora facciamo $\varphi = \pi$ è

$$0 = \cfrac{\pi}{1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{\dots - \cfrac{\pi^2}{2k + 1 - \cfrac{\pi^2}{2k + 3 - \cdots}}}}}}$$

per cui, al limite,

[1] *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques*, §35 (1768).

$$1-\cfrac{\pi^2}{3-\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{\dots-\cfrac{\pi^2}{2k+1-\cfrac{\pi^2}{2k+3-\cdots}}}}}=\infty$$

che vuol dire pure

$$\cfrac{\pi^2}{3-\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{\dots-\cfrac{\pi^2}{2k+1-\cfrac{\pi^2}{2k+3-\cdots}}}}}=-\infty$$

e di nuovo, considerando il reciproco,

$$3=\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\cfrac{\pi^2}{11-\cfrac{\pi^2}{2k+3-\cdots}}}}} \qquad [2]$$

Si tratta di uno strano modo di calcolare il numero intero 3, le prime convergenti sono le seguenti:

$$\frac{\pi^2}{5-\pi^2}\approx -2.026777\ldots$$

$$\frac{\pi^4-7\pi^2}{6\pi^2-35}\approx 1.169473\ldots$$

$$\frac{-8\pi^4+63\pi^2}{\pi^4-49\pi^2+315}\approx 2.211857\ldots$$

che sono obiettivamente bruttine, ma baste attivare al denominatore 15 e:

$$\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\cfrac{\pi^2}{11-\cfrac{\pi^2}{13-\cfrac{\pi^2}{15-\pi^2}}}}}}=\frac{\pi^8-330\pi^6+14157\pi^4-135135\pi^2}{28\pi^6-3366\pi^4+90090\pi^2-675675}\approx 3.0003\ldots$$

La convergente che ha 21 per denominatore vale circa 3,000000005… ogni successiva convergente restituisce circa 1.5 decimali in più, tanto che quella avente $27-\pi^2$ differisce da 3 per meno di $2\cdot 10^{-14}$.

Dalla [2] possiamo calcolare altri valori: abbiamo infatti l'obiettivo di capire quanto valga

$$x=\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\cfrac{\pi^2}{11-\cfrac{\pi^2}{2k+3-\cdots}}}}$$

È

$$\frac{\pi^2}{5-x}=3$$

Da cui immediatamente

$$\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\cfrac{\pi^2}{11-\cfrac{\pi^2}{2k+3-\cdots}}}}=\frac{15-\pi^2}{3}\approx 1.7101318663\ldots$$

Se vogliamo il valore della frazione continua successiva

$$\cfrac{\pi^2}{9-\cfrac{\pi^2}{11-\cfrac{\pi^2}{13-\cfrac{\pi^2}{2k+3-\cdots}}}}=y$$

non dobbiamo far altro che scrivere

$$\frac{\pi^2}{7-y}=\frac{15-\pi^2}{3}$$

col che

$$\cfrac{\pi^2}{9-\cfrac{\pi^2}{11-\cfrac{\pi^2}{13-\cfrac{\pi^2}{2k+3-\cdots}}}} = \frac{10\pi^2-105}{15-\pi^2} \approx 1.2287465\ldots$$

Se scriviamo che è

$$3 = \cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\cfrac{\pi^2}{11-\cfrac{\pi^2}{2k+3-\cdots}}}}}$$

$$\gamma_k = \cfrac{\pi^2}{2k+3-\cfrac{\pi^2}{2k+5-\cfrac{\pi^2}{2k+7-\cfrac{\pi^2}{\cdots}}}}$$

Soggetta alla condizione iniziale [2] $\gamma(1) = 3$ allora è

$$\gamma_k = \frac{\pi^2}{2k+3-\gamma_{k+1}}$$

e subito

$$\gamma_{k+1} = \frac{(2k+3)\gamma_k - \pi^2}{\gamma_k} \qquad [3]$$

Una annotazione molto specifica riguarda $\varphi = \frac{\pi}{4}$ nella [1] per cui

$$1 = \cfrac{\pi}{1\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{3\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{5\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{\dots-\cfrac{\pi^2}{(2k+1)\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{(2k+3)\cdot 4-\cdots}}}}}} \qquad [4]$$

ossia

$$4-\pi=\cfrac{\pi^2}{3\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{5\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{\dots-\cfrac{\pi^2}{(2k+1)\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{(2k+3)\cdot 4-\cdots}}}}}$$

e per la [2]

$$\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{\dots-\cfrac{\pi^2}{2k+3-\cfrac{\pi^2}{2k+5-\cdots}}}}}-\cfrac{\pi^2}{3\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{5\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{\dots-\cfrac{\pi^2}{(2k+1)\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{(2k+3)\cdot 4-\cdots}}}}}=\pi-1$$

Se invece facciamo, sempre nella [1], $\varphi=\frac{\pi}{2}$ è

$$2=\cfrac{\pi^2}{3\cdot 2-\cfrac{\pi^2}{5\cdot 2-\cfrac{\pi^2}{\dots-\cfrac{\pi^2}{(2k+1)\cdot 2-\cfrac{\pi^2}{(2k+3)\cdot 2-\cdots}}}}}\qquad [5]$$

Abbiamo così ottenuto i primi tre naturali come frazioni continue, molto regolari, che coinvolgono π^2.

Un confronto tra [4] e [5] dice che

$$\cfrac{2}{1\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{3\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{\dots-\cfrac{\pi^2}{(2k+1)\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{(2k+3)\cdot 4-\cdots}}}}}=\cfrac{\pi}{3\cdot 2-\cfrac{\pi^2}{5\cdot 2-\cfrac{\pi^2}{\dots-\cfrac{\pi^2}{(2k+1)\cdot 2-\cfrac{\pi^2}{(2k+3)\cdot 2-\cdots}}}}}$$

e che quindi

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3\cdot 2-\cfrac{\pi^2}{5\cdot 2-\cfrac{\pi^2}{\dots-\cfrac{\pi^2}{(2k+1)\cdot 2-\cfrac{\pi^2}{(2k+3)\cdot 2-\cdots}}}}}{1\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{3\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{\dots-\cfrac{\pi^2}{(2k+1)\cdot 4-\cfrac{\pi^2}{(2k+3)\cdot 4-\cdots}}}}}$$