Semplici divisioni

Gli antichi Egizi utilizzavano spesso somme di frazioni con numeratore unitario per rappresentare frazioni a numeratore non unitario, ad esempio scrivevano

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

È molto facile calcolare (con un processo anche automatico) la scomposizione di una qualsiasi frazione propria in frazioni a numeratore unitario che abbiamo la seguente proprietà: i successivi denominatori sono i più grandi possibile e tutti diversi tra loro.

Nel caso il numeratore non sia già unitario si può utilizzare il seguente pseudo-codice per calcolare in successione i denominatori *egizi* q_k:

```
input n, d                                  § n::numeratore; d::denominatore
value=n/d
while remainder>0 do
  q_k=int(1/value+1-)
  value=value-1/q_k
endwhile
```

Se il numeratore è già unitario si può non effettuare alcun calcolo ovvero utilizzare il medesimo pseudo-codice che restituisce $q_1 = d + 1$.

Nel seguito utilizzeremo questo secondo approccio. Saranno mostrate due soluzioni laddove si voglia non avere nella scomposizione un denominatore identico a qello della frazione originaria.

- Denominatore 2
  $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \qquad \sum q_k = 9$

- Denominatore 3
  $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \qquad \sum q_k = 16$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \qquad \sum q_k = 8$$

- Denominatore 4

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \qquad \sum q_k = 25$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad \sum q_k = 6$$

Oppure (se non vogliamo a destra lo stesso denominatore che a sinistra)

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \qquad \sum q_k = 27$$

- Denominatore 5

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} \qquad \sum q_k = 36$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \qquad \sum q_k = 18$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \qquad \sum q_k = 12$$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} \qquad \sum q_k = 26$$

- Denominatore 6

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42} \qquad \sum q_k = 49$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \qquad \sum q_k = 5$$

- Denominatore 7

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56} \qquad \sum q_k = 64$$

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28} \qquad \sum q_k = 32$$

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231} \qquad \sum q_k = 245$$

$$\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14} \qquad \sum q_k = 16$$

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{70} \qquad \sum q_k = 77$$

$$\frac{6}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{42} \qquad \sum q_k = 47$$

Vi sono naturalmente alcune regolarità; nell'ipotesi fatta abbiamo l'identità

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q(q+1)} \qquad \sum q_k = (q+1)^2 \qquad [1]$$

ovvero: una qualsiasi frazione a denominatore unitario si scompone in due frazioni, la prima avente il denominatore successivo e la seconda il prodotto dei due; la somma di essi è il quadrato del denominatore successivo.

Vediamo il caso in cui il numeratore è inferiore di una unità rispetto al denominatore

$$\frac{q-1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{q-2}{2q}$$

La seconda frazione è unitaria se

$$\frac{q-2}{2q}=\frac{1}{s}$$

ossia

$$q=\frac{2s}{s-2}$$

che ha soluzioni intere solo nei 4 casi già visti.

Vi sono altri casi in cui la scomposizione dà luogo a due sole frazioni. Dobbiamo avere

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \qquad [2]$$

dove $p > 1, s > r$. Allora è

$$\frac{p}{q} = \frac{r+s}{rs}$$

p, q sono primi tra loro per definizione. Se r, s fossero primi tra loro allora $q = rs$ e $p = r + s$ che non ammette soluzioni intere.

Deve essere quindi $s = kr$ ossia

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{kr} = \frac{k+1}{kr}$$

con $r = \left[\frac{q}{p}\right] + 1$

da cui

$$\frac{1}{kr} = \frac{p\left[\frac{q}{p}\right] - q + p}{q\left[\frac{q}{p}\right] + q}$$

che risolve il problema se si ottiene una frazione a numeratore unitario. In tal caso la scomposizione è

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\left[\frac{q}{p}\right] + 1} + \frac{1}{q\left(\left[\frac{q}{p}\right] + 1\right)} \qquad [3]$$

Il fattore di proporzionalità kè proprio q.

Ad esempio

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35} = \frac{1}{3} + \frac{1}{105} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 35}$$

oppure

$$\frac{6}{17} = \frac{1}{3} + \frac{1}{51} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 17}$$

Invece $\frac{7}{17} = \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{663}$ non offre una scomposizione in due frazioni unitarie aventi i requisiti richiesti.

La tabella seguente mostra i denominatori della frazione inferiore per tutti i denominatori fino a 25 incluso

	q																						
p	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
1	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	182	210	240	272	306	342	380	420	462	506	552	600	650
2	6		15		28		45		66		91		120		153		190		231		276		325
3		4	10			24		20	44			70		48	102			140		88	184		
4					14		9		33				60				95		42		138		
5				3		8	18			12		42		16		36	76					120	
6									22						51						92		25
7								5		12	26					18		60				24	
8													30						21		69		
9												7		16	34								
10																	38		7				
11																9		20	42			8	
12																					46		
13																				11		24	50
14																							
15																							
16																							
17																							
18																							
19																							
20																							
21																							
22																							
23																							
24																							
25																							

Il numero di soluzioni al problema, a partire dalla frazione di denominatore $q = 2$ è

{1,2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 3, 5, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 4, 5, 4, 6, 3, 7, 5, 4, …}

Consideriamo le frazioni di denominatore pari a 101 (numero primo). Vi sono 7 soluzioni, pari ai numeratori $1, 2, 3, 6, 17, 34, 51$. Abbiamo

$$\frac{1}{101} = \frac{1}{102} + \frac{1}{102 \cdot 101}$$

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{51} + \frac{1}{51 \cdot 101}$$

$$\frac{3}{101} = \frac{1}{34} + \frac{1}{34 \cdot 101}$$

$$\frac{6}{101} = \frac{1}{17} + \frac{1}{17 \cdot 101}$$

$$\frac{17}{101} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6 \cdot 101}$$

$$\frac{34}{101} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 101}$$

$$\frac{51}{101} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 101}$$

Tra i primi 30 numeri primi vi sono le soluzioni nel numero seguente:

{1, 2, 3, 3, 5, 3, 5, 5, 7, 7, 5, 3, 7, 5, 9, 7, 11, 3, 5, 11, 3, 9, 11, 11, 5, 7, 7, 11, 7, 7, …}

l'andamento è approssimativamente di crescita con la radice quadrata dell'indice del numero primo.

Se riconsideriamo la [2] abbiamo che per numeratore generico p della frazione da scomporre è

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{q+1} + \frac{p}{q(q+1)}$$

ovvero

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q+1}{p}} + \frac{1}{\frac{q(q+1)}{p}} \qquad [4]$$

Quindi le soluzioni sono solo e tutte quelle i cui numeratori p dividono $q+1$, dato che p, q sono primi tra loro.

Consideriamo ad esempio le frazioni aventi 59 per denominatore; quelle rappresentabili mediante la somma di due frazioni unitarie hanno per numeratore gli 11 divisori propri di 60. La proprietà ha carattere generale : se $s(p)$ è il numero di soluzioni allora

$$s(p) = d(p+1) - 1 \qquad [4]$$

La somma dei denominatori delle frazioni minori è pari a p volte la somma dei divisori di $(p+1)$. Constatiamo effettivamente che i numeratori sono i divisori propri di $p+1$. Avremo quindi le seguenti scomposizioni per $q = 59$:

p	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	$\sum = 108$
r	60	30	20	15	12	10	6	5	4	3	2	$\sum = 167$
s	3540	1770	1180	885	708	590	354	295	236	177	118	$\sum = 9853$

tutte le somme sono multiple di 59.

Si può anche volere che nella scomposizione, il primo denominatore sia di k unità maggiore di quello originario, allora le soluzioni a due addendi sono tutte e solo del tipo

$$\frac{1}{kq} = \frac{1}{kq+k} + \frac{1}{kq(q+1)} \qquad [5]$$

Esse occorrono se e solo se il denominatore è un multiplo di q secondo il valore di spostamento del primo denominatore. Se lo vogliamo ad esempio maggiore di 2 unità, il denominatore di partenza deve essere un numero pari.

In questa situazione lo studio per denominatori $p > 1$ è più articolato, visto che si possono imporre diverse condizioni ai vari denominatori dello sviluppo, già a partire dal primo. Se vogliamo ad esempio sviluppare 2/15 abbiamo la scomposizione canonica

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$$

Dal momento che 15 è multiplo di 3 e di 5 potremmo voler chiedere che il primo denominatore superi 15 di 3 oppure di 5 unità. Nel primo caso

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{18}+\frac{1}{13}+\frac{1}{1170}$$

Che non è accettabile, allora vogliamo che anche il secondo denominatore superi di 3 unità il precedente, allora

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{18}+\frac{1}{21}+\frac{1}{34}+\frac{1}{1139}+\frac{1}{7170334}$$

Oppure vorremmo che il secondo denominatore superi il primo di una quantità pari all'altro fattore:

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{18}+\frac{1}{23}+\frac{1}{30}+\frac{1}{1035}$$

O possiamo fare il contrario per cui

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{20}+\frac{1}{23}+\frac{1}{26}+\frac{1}{718}+\frac{1}{1288092}$$

Come si vede il risultato non resta univoco.

Non posso concludere senza vedere cosa capita al più famoso di tutti:

$$\pi-3=\frac{1}{8}+\frac{1}{61}+\frac{1}{5020}+\frac{1}{128541455}+\frac{1}{1288092}+\frac{1}{162924332716605980}$$

Le ridotte successive valgono

$$0.125;\quad 0.141\,3934426\ldots;\quad 0.1415926\,458\ldots;\quad 0.1415926535\,897\,9323232\ldots$$

$$0.1415926535\,8979323846\,2643383279\,5028\,49\ldots$$

l'ultima ha 34 cifre decimali esatte.