Rapporti tra integrali

Carmine Suriano 2019

Problema: data una funzione irrazionale $f(x) = \sqrt{1 - x^k}$ calcolare il rapporto tra gli integrali, estesi tra 0 e 1, di essa e della sua inversa. Dimostrare che tale rapporto è razionale se k è razionale. Trovarne il limite quando $k \to \infty$

$$\frac{\int_0^1 \sqrt{1 - x^k}\,dx}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^k}}\,dx} = r(k)$$

Calcoliamo $\int_0^1 \sqrt{1-x^k}dx$ mediante integrazione per parti

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^k}dx = x\sqrt{1-x^k}\Big|_0^1 + \frac{k}{2}\int_0^1 \frac{xx^{k-1}}{\sqrt{1-x^k}}dx$$
$$= \frac{k}{2}\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1-x^k}}dx \qquad \text{(i)}$$

Calcoliamo $\int_0^1 \sqrt{1-x^k}dx$ moltiplicando e dividendo l'integrando per $\sqrt{1-x^k}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^k}dx = \int_0^1 \frac{1-x^k}{\sqrt{1-x^k}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^k}}dx - \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1-x^k}}dx \qquad \text{(ii)}$$

Sostituiamo l'ultimo termine della (ii) ricavandolo dalla (i)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^k}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^k}}dx - \frac{2}{k}\int_0^1 \sqrt{1-x^k}dx \qquad \text{(iii)}$$

Portiamo l'ultimo termine della (iii) al primo membro

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^k}\,dx + \frac{2}{k}\int_0^1 \sqrt{1-x^k}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^k}}\,dx \qquad \text{(iv)}$$

Ed infine

$$\frac{\int_0^1 \sqrt{1-x^k}\,dx}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^k}}\,dx} = \frac{k}{2+k} \qquad \text{(v)}$$

Ed infine

$$\frac{\int_0^1 \sqrt{1-x^k}\,dx}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^k}}\,dx} = \frac{k}{2+k} \qquad \text{(v)}$$

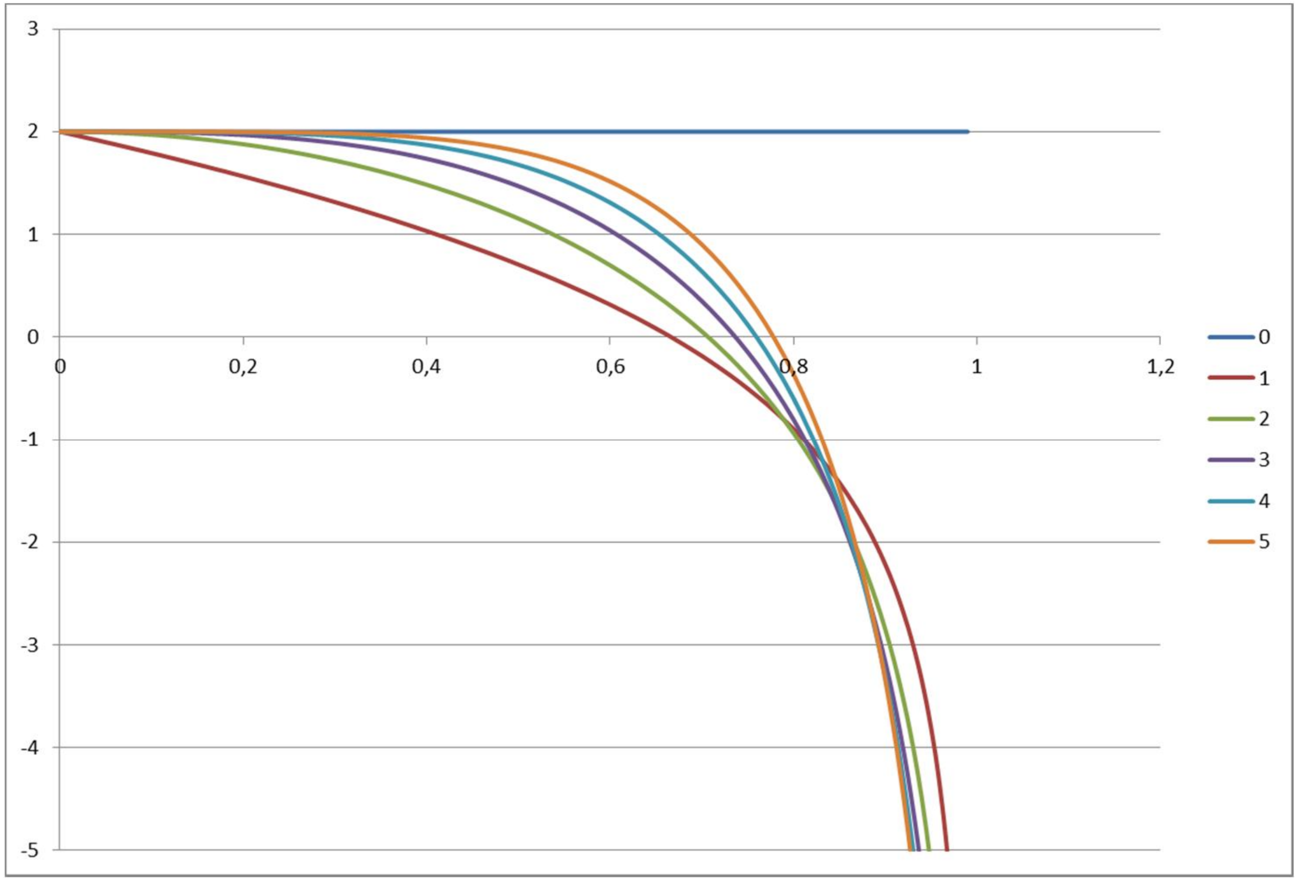
Il rapporto è espresso da un valore razionale quando k è razionale, esso è asintoticamente tendente a 1 quando k è molto grande.

Dalla (i) è

$$\int_0^1 \frac{2-(2+k)x^k}{\sqrt{1-x^k}}\,dx = 0$$

(vi)

Indipendentemente dal valore di *k*.



Andamento delle funzioni $\dfrac{2-(2+k)x^k}{\sqrt{1-x^k}}$ secondo k.

Dalla (vi), se k=2t

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2t}}} = (1+t)\int_0^1 \frac{x^{2t}dx}{\sqrt{1-x^{2t}}}$$

(vii)

In particolare se in (vii) t=2, che è il caso lemniscato,

$$\frac{\widetilde{\omega}}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 3\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

(viii)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 3\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Da Eulero abbiamo

$$\pi = 4m\int_0^1 \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$\pi = 2\widetilde{\omega}\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

infine

$$\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{8} \qquad \text{(ix)}$$

Da Eulero e dalla (viii) abbiamo la sequenza

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\widetilde{\omega}}{2} = I_0$$

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2\widetilde{\omega}} = I_2$$

$$\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\widetilde{\omega}}{6} = I_4 = \frac{I_0}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{3\pi}{10\widetilde{\omega}} = I_6 = \frac{3I_2}{5}$$

$$\int_0^1 \frac{x^8dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\widetilde{5\omega}}{42} = I_8 = \frac{5I_0}{21}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{10}dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{7\pi}{30\widetilde{\omega}} = I_{10} = \frac{7I_2}{15}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{12}dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{15\widetilde{\omega}}{154} = I_{12} = \frac{15I_0}{77}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{14}dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{11\pi}{45\widetilde{\omega}} = I_{14} = \frac{11I_2}{90}$$

Inoltre

$$\int_0^1 \frac{x^{m+3}dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{m}{m+2}\int_0^1 \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$I_{m+3} = \frac{m}{m+2} I_{m-1} \qquad m \neq 0, m > -2$$

$$I_{-2} = -I_2$$

$$I_1 = \frac{\pi}{4} \qquad I_5 = \frac{\pi}{8} \qquad I_9 = \frac{3\pi}{32}$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \qquad I_7 = \frac{1}{3} \qquad I_{11} = \frac{4}{15}$$

Ricorrentemente (m>1)

$$I_{4m-2} = \frac{2m-1}{2m+1} \cdot \frac{2m-5}{2m-3} \cdot \frac{2m-9}{2m-7} \cdot \ldots \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{5} I_2$$

$$I_{4m-4} = \frac{2m+1}{2m+3} \cdot \frac{2m-3}{2m-1} \cdot \frac{2m-7}{2m-5} \cdot \ldots \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{3} I_0$$

Gli integrali di indice 4m+3 si esprimono in numeri razionali; quelli di indice 4m+1 mediante multipli razionali di π.
Entrambi i tipi hanno espressioni ricorsive analoghe alle precedenti.

$\widetilde{\omega}$ = 2.622 057 554 292 119 810 464 838...

π = 3.141 592 653 589 793 238 462
643...

$$\frac{\pi}{\widetilde{\omega}} = M\left(1, \sqrt{2}\right) = \frac{1}{G} = 1.198\ 140\ 234\ 735\ 592\ 207\ 439\ \ \ldots$$

È l’inverso della costante di Gauss ***G*** , ed è pari alla media aritmetico-geometrica tra 1 e $\sqrt{2}$.

Problema: data una funzione irrazionale $f(x) = \sqrt{1 + x^k}$ calcolare la relazione tra gli integrali, estesi tra 0 e 1, di essa e della sua inversa.

Calcoliamo $\int_0^1 \sqrt{1+x^k}dx$ mediante integrazione per parti

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^k}dx = x\sqrt{1+x^k}\Big|_0^1 - \frac{k}{2}\int_0^1 \frac{xx^{k-1}}{\sqrt{1+x^k}}dx$$

$$= \sqrt{2} - \frac{k}{2}\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x^k}}dx$$

$$\frac{k}{2}\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x^k}}dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^k}dx \qquad \text{(I)}$$

Calcoliamo $\int_0^1 \sqrt{1+x^k}dx$ moltiplicando e dividendo l'integrando per $\sqrt{1+x^k}$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^k}dx = \int_0^1 \frac{1+x^k}{\sqrt{1+x^k}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^k}}dx + \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1-x^k}}dx \qquad \text{(II)}$$

Sostituiamo l’ultimo termine della (II) ricavandolo dalla (I)

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^k}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^k}}\,dx$$

$$+\frac{2}{k}\left[\sqrt{2}-\int_0^1 \sqrt{1+x^k}\,dx\right] \qquad \text{(III)}$$

Portiamo l’ultimo termine della (III) e semplifichiamo

$$(k+2)\int_0^1 \sqrt{1+x^k}\,dx - k\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^k}}\,dx = 2\sqrt{2}$$

(IV)