Che figura

Nel diario matematico di Gauss, alla nota 18 del 10 luglio 1796, troviamo cripticamente scritto

EYPHEKA! num= Δ + Δ + Δ

che, tradotto in forma comprensibile, dice: "Ho trovato la dimostrazione che un qualsiasi numero intero positivo può essere scritto come somma al massimo di tre numeri triangolari".

Vale la pena ricordare che un numero triangolare T_n è pari alla somma dei primi n interi, per cui

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

Il teorema dice che esiste almeno una scomposizione del tipo

$$n = T_x + T_y + T_z \qquad (2)$$

dove poniamo che sia $x \geq y \geq z$.

Esploriamo ora, limitandoci a $n \leq 5000$, qualche proprietà derivante dalla (2).

Dato un numero n è immediato calcolare quale sia l'indice massimo x che può compare nella (2): basta risolvere la (1)

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} \leq \frac{(n+1)^2}{2}$$

per cui

$$x \leq \sqrt{2n} \qquad (3)$$

ad esempio se $n = 718$ abbiamo che $x \leq 37$. Infatti $T_{37} = 703$ mentre $T_{38} = 741$.

Il teorema di Gauss ci assicura che esiste almeno una scomposizione della forma (2), ma non ci dice quante ve ne sono. Esaminiamo ordinatamente il problema. Se $n = T_k$ ovvero se il numero è di per sé della forma (1) allora di certo abbiamo la soluzione massimale $x = k$. Non è detto che essa sia l'unica, però.

A parte l'unità, tutti gli altri numeri triangolari sono esprimibili in più di una maniera come somma di altri numeri triangolari: ad esempio

$$3 = T_2 = T_1 + T_1 + T_1$$

$$6 = T_3 = T_2 + T_2$$

$$10 = T_4 = T_3 + T_2 + T_1$$

$$15 = T_5 = T_3 + T_3 + T_2$$

$$21 = T_6 = T_5 + T_3 = T_5 + T_2 + T_2 = T_4 + T_4 + T_1$$

$$28 = T_7 = T_6 + T_3 + T_1 = T_5 + T_4 + T_2$$

D'altro canto vi sono dei numeri, oltre l'unità, che hanno una sola scomposizione:

$$2 = T_1 + T_1$$

$$4 = T_2 + T_1$$

$$5 = T_2 + T_1 + T_1$$

$$8 = T_3 + T_1 + T_1$$

$$11 = T_4 + T_1$$

$$14 = T_4 + T_2 + T_1$$

$$20 = T_4 + T_4$$

$$29 = T_7 + T_1$$

$$50 = T_7 + T_6 + T_1$$

$$53 = T_7 + T_5 + T_4$$

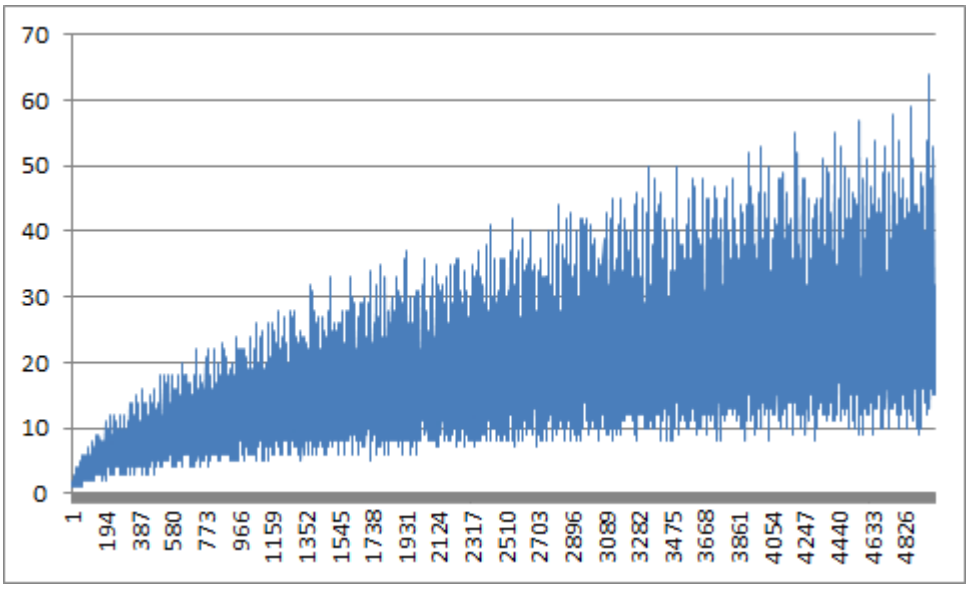
Mentre i seguenti ne hanno due (oltre i quattro già visti):

$$7 = T_3 + T_1 = T_2 + T_2 + T_1$$

$$9 = T_3 + T_2 = T_2 + T_2 + T_2$$

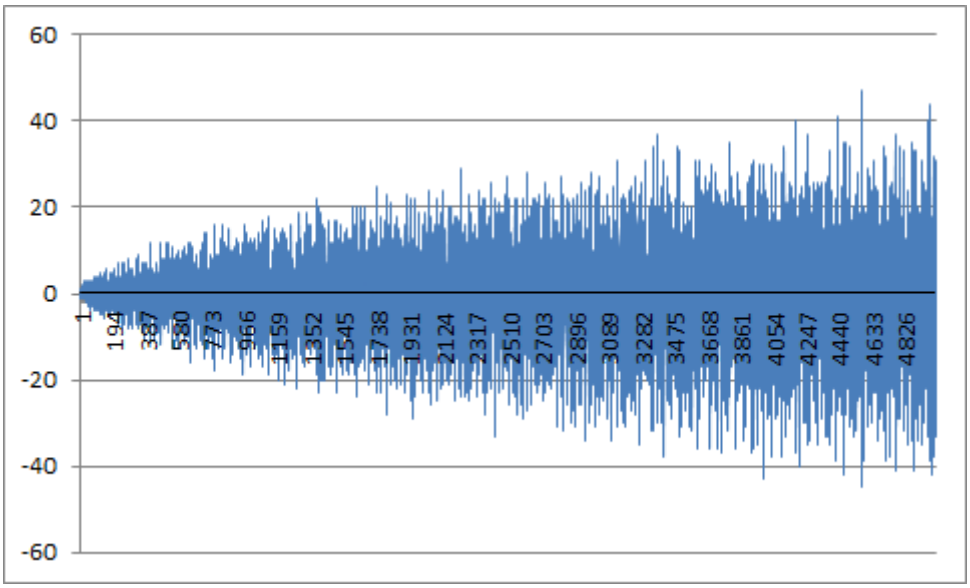
e inoltre 13, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 26, …

Ne hanno poi rispettivamente 3, 4, 5, 6, … i numeri 12, 21, 52, 57, 91, 121.

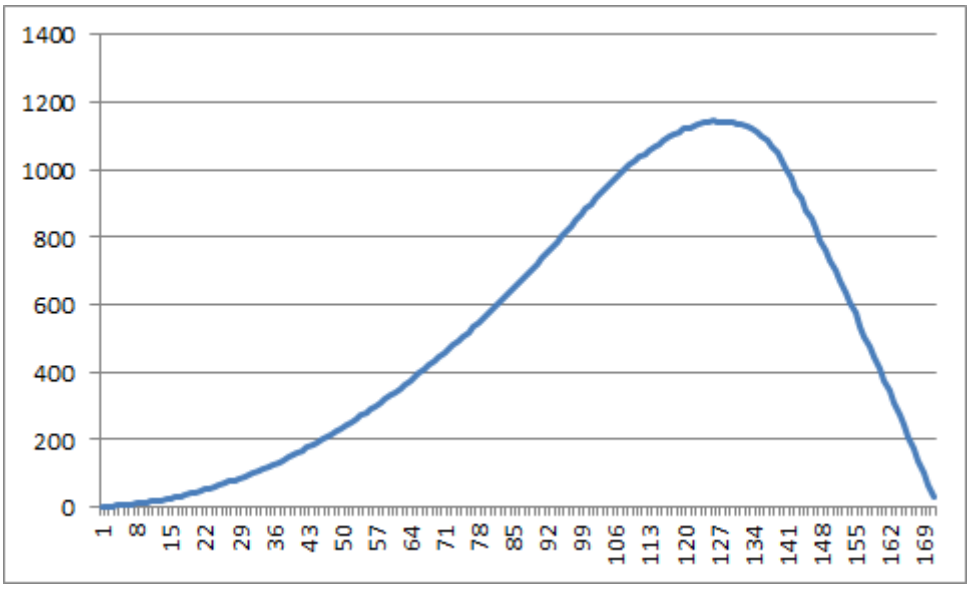


La figura mostra il numero di soluzioni della (2) per $n \leq 5000$. La funzione è crescente in 2527 punti, decrescente in 2246 e stazionaria in 227; si hanno massimi relativi in 3, 12, 16, 21, 34, 37, … e minimi relativi in 8, 11, 14, 20, 29, 35, 38, ….

Le differenze prime sono riportate nella figura seguente



La funzione $\sigma = x + y + z$ raccoglie la somma degli indici della soluzione (2). Nell'intervallo considerato $1 \leq \sigma \leq 171$ e la distribuzione delle frequenze è la seguente



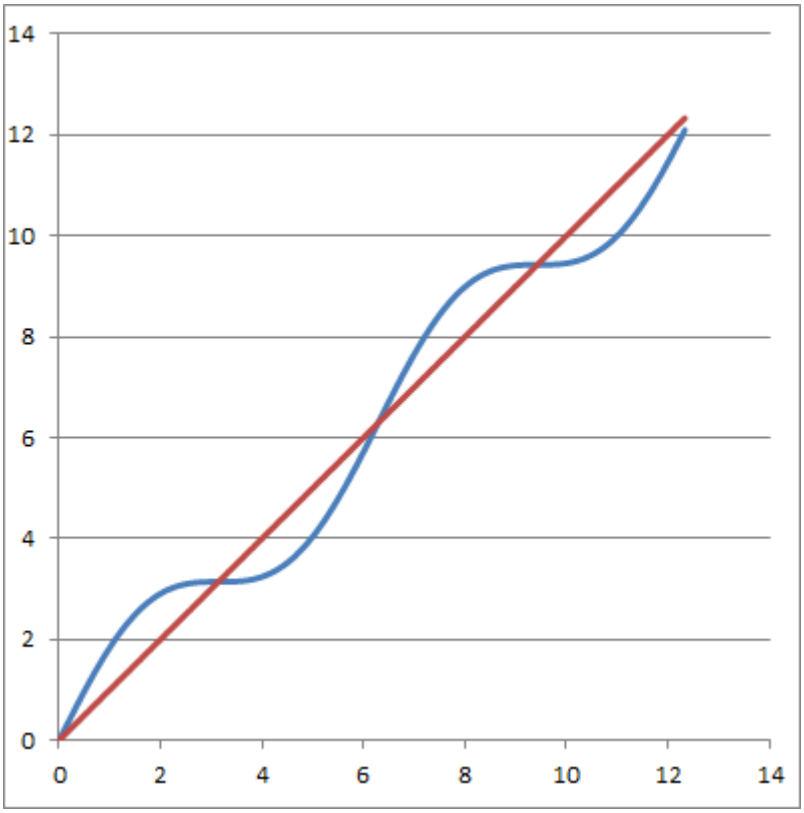
Il massimo, in corrispondenza di $\sigma = 126$, vale 1145. L'integrale sull'intervallo è pari a 90081. Le frequenza assenti sono 6, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, …

∅ ∅ ∅ ∅

La funzione

$$f(x) = x + \sin x \qquad (4)$$

che vediamo disegnata in blu nella figura



gode di una proprietà interessante. Essa interseca la funzione identica negli infiniti punti

$$\bar{x} = k\pi \qquad (5)$$

dove k è un numero intero. In tali punti la derivata

$$f'(x) = 1 + \cos x$$

assume due valori possibili a seconda che k sia dispari o pari.

Nel primo caso $\cos(2t + 1) = -1$ e la derivata prima si annulla, come pure la seconda, che vale $f''(x) = -\sin x$, e siamo in presenza di un flesso di ordine infinito, perché sono nulle anche tutte le derivate successive.

Nel secondo caso $\cos(2t) = 0$, la derivata prima vale 1, mentre tutte le successive sono nulle e la funzione è crescente.

La faccenda, sempre nel primo caso, si fa interessante viste le proprietà appena viste. Supponiamo di essere in un intorno "abbastanza" vicino al primo flesso, che capita in $\bar{x} = \pi$ e chiamiamo questo punto x_0. Mandiamo questo punto nel punto

$$x_1 = f(x_0)$$

Iteriamo l'applicazione di modo che

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad [n \geq 0] \qquad (6)$$

e scopriremo un fatto interessante: l'applicazione è stabile, ossia ha un punto limite di accumulazione quando $n \to \infty$. Questo punto ha un valore facilmente calcolabile, infatti, al limite avremo $x_{n+1} = x_n$ ovvero

$$x_{n+1} = x_{n+1} + \sin x_{n+1}$$

e quindi

$$x_\infty = \pi$$

Il grafico mostra la faccenda: le curve colorate convergono al medesimo valore

La cosa bella è che poniamo, con disinvoltura ma anche con ragionevole naturalezza, $x_0 = 3$ otteniamo le seguenti approssimanti:

1. $x_0 = 3$
2. $x_1 = 3.1411200080$
3. $x_2 = 3.1415926535\ 7219555873\ 48885681407$
4. $x_3 = 3.1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5019759271$
5. $x_4 = 3.1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5028841971\ 6939937510$

   $5820974944\ 5923078164\ 0628620899\ 8628034825\ 3421170678 \ldots$

dopo sole 4 iterazioni abbiamo 99 decimali esatti.

La ragione di tanta accuratezza sta proprio nell'annullarsi nel punto di accumulazione π di tutte le derivate a partire dalla seconda.