30. Girotondo

Nessuno può negare che il numero di gran lunga più “presente” e quindi più studiato, se non vogliamo dire il più “importante” è π ossia il rapporto tra la lunghezza di ogni circonferenza e quella del rispettivo diametro ovvero il rapporto tra l’area di ogni cerchio e quella del quadrato costruito sul rispettivo raggio. Che questi due numeri siano la stessa cosa non è proprio immediato a dimostrare, come pure il fatto che esso sia un invariante per ogni circonferenza.

Dobbiamo ad Archimede e a Liu, Greco il primo e Cinese il secondo, i primi studi metrici sulle proprietà della figura più regolare che possiamo immaginare; l’avventura è cominciata circa 3500 anni fa ed ha attraversato sostanzialmente tre fasi: quella puramente geometrica, pre-analitica, diciamo fino a Newton; quella analitica, diciamo fino a Ramanujan, quella computazionale tutt’ora in corso.

Datane la natura irrazionale, addirittura trascendente, il Nostro ammette, nel campo dei razionali, tutta una serie di approssimazioni. Ne mostrerò alcune.

Nella sua Della misura del cerchio, Archimede, utilizzando i poligoni regolari di 96 lati rispettivamente inscritti e circoscritti ad una circonferenza stabilisce un risultato straordinario, incapsulando il valore “vero” di π tra due numeri razionali nella celebre relazione

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{10}{70} \qquad [30.1]$$

con un *errore* quindi inferiore a 1/497 quindi dell’ordine dello 0,2%. Il metodo è corretto e, in linea di principio, consente di ottenere, raddoppiando il numero dei lati, risultati via via migliori.

Nella presente discussione io adotterò un metodo particolare per determinare alcuni numeri razionali che approssimano π. Questi razionali vengono dedotti in maniera capovolta rispetto al metodo consueto. Si parte dalla considerazione che oggi il valore di π è noto con enorme precisione; noi non cercheremo di migliorare tale caratteristica, ma vogliamo trovare frazioni che abbiano proprietà specifiche.

- I numeri interi

Il primo caso che esploriamo è quello di trovare frazioni il cui numeratore e denominatore siano ricercati in ordine crescente a partire dall’unità, obbedendo ad una semplice regola: la sequenza $\{i_n\}$ viene generata aggiungendo, a partire dalla frazione apparente 3/1, un ulteriore termine solo allorquando la nuova frazione approssima il valore di π con una recisione migliore del termine precedente della sequenza stessa. Mi spiego con un esempio: i_1=3/1, i valori successivi, che vengono testati sono 3/2, 4/1, 4/2, 5/1, 5/2, 6/1, 6/2, 7/1, 7/2, 7/3, ., fino a 22/6: nessuna di queste frazioni approssima π meglio di 3/1 (che produce uno scostamento di 0,1415…) fino a che si giunge a 22/7=3,14286… che costituisce una approssimazione migliore, di conseguenza tale frazione diventa il secondo termine della sequenza: i_2=22/7. Si continua con 23/1, 23/2, …., 179/56 e nessuna frazione migliora l’approssimazione, fino a che 179/57=3,14035… migliora ulteriormente l’approssimazione, per cui diventa il terzo elemento della sequenza: i_3=179/57.

La sequenza inizia così:

$\{i_n\}$= {3/1, 22/7, 179/57, 201/64, 223/71, 245/78, 267/85, 289/92, 311/99, 333/106, 355/113, 52163/16604, 52518/16717, 52873/16830, 53228/16943, …}

Disponiamo i valori in una tabella in modo da evidenziare alcune proprietà

n	N	D	ΔN	ΔD	scostamento da π [ppm]
1	3	1			141592,6536
2	22	7	19	6	1264,489267
3	179	57	157	50	1241,776397
4	201	64	22	7	967,6535898
5	223	71	22	7	747,5831673
6	245	78	22	7	567,0125642
7	267	85	22	7	416,1830016
8	289	92	22	7	288,3057637
9	311	99	22	7	178,5121757
10	333	106	22	7	83,21962753
11	355	113	22	7	0,266764189
12	52163	16604	51808	16491	0,266213257
13	52518	16717	355	113	0,262610551
14	52873	16830	355	113	0,259056222
15	53228	16943	355	113	0,255549304
…			↓	↓	…
158	103993	33102	355	113	0,000577891
159	104348	33215	355	113	0,000331628
160	208341	66317	103993	33102	0,000122356
161	312689	99532	104348	33215	0,000029143
162	833719	265381	521030	165849	0,000008715
163	1146408	364913	312689	99532	0,000001610
164	3126535	995207	1980127	630294	0,000001143
165	4272943	1360120	1146408	364913	0,000000404
166	5419351	1725033	1146408	364913	0,000000022
…					

Il secondo ed il quinto termine della sequenza sono proprio gli estremi dell'approssimazione archimedea [30.1]. Se osserviamo l'andamento dei valori dei numeratori e dei denominatori notiamo alcuni "salti" tra valori successivi, in particolare dopo il termine 2°, 11°, 159°. Ancor più notevole il fatto che i numeratori e i denominatori tra il quarto e l'undicesimo compresi differiscono dai rispettivi precedenti di 22 e 7 unità, che costituiscono di per sé un termine della sequenza; lo stesso accade per i 147 termini dal tredicesimo al 159° compresi, i cui numeratori e denominatori differiscono dal rispettivo precedente i 355 e 113 unità, che costituiscono di nuovo un termine della sequenza. I termini che a loro volta compaiono come differenze tra altri termini consecutivi sono evidenziati in tabella.

È lo stesso Liu a dire che si può assumere, con sempre miglior approssimazione,

$$\frac{201+22}{64+7} \to \frac{201+22+22}{64+7+7} \to \frac{201+22+22+22}{64+7+7+7} \to \ldots \frac{201+7\cdot 22}{64+7\cdot 7} \to \pi$$

avendo individuato una "parte principale" ed una "secondaria" per i termini delle frazioni approssimanti.

- I numeri primi

Procedendo alla stessa stregue di quanto fatto nel caso precedente abbiamo tre modi di ottenere sequenze che soddisfano la stessa proprietà di miglior approssimazione successiva per il magico valore:

  - Numeri primi al numeratore

In maniera analoga a quanto già fatto, definiamo una sequenza $\{a_n\}$ generata aggiungendo, a partire dalla frazione apparente 3/1, un ulteriore termine solo allorquando la nuova frazione approssima il valore di π con una precisione migliore del termine precedente della sequenza stessa. Abbiamo

n	N	D	ΔN	ΔD	scostamento da π [ppm]
1	3	1			141592,6536
2	13	4	10	3	108407,3464
3	19	6	6	2	25074,01308
4	41	13	22	7	12253,50026
5	47	15	6	2	8259,320256
6	107	34	60	19	5466,16994
7	113	36	6	2	2703,764701
8	157	50	44	14	1592,65359
9	179	57	22	7	1241,776397
10	223	71	44	14	747,5831673
11	311	99	88	28	178,5121757
12	977	311	666	212	113,5539113
13	1021	325	44	14	54,19205133
14	1087	346	66	21	25,84352003
15	1753	558	666	212	15,59265789
16	3217	1024	1464	466	8,908910207
17	4637	1476	1420	452	6,262399367
18	5303	1688	666	212	4,975864675
19	7433	2366	2130	678	3,473539075
20	10273	3270	2840	904	2,439522515
21	14533	4626	4260	1356	1,646240031
22	18793	5982	4260	1356	1,212600158
23	22343	7112	3550	1130	0,977549298
24	23053	7338	710	226	0,939226206

25	24473	7790	1420	452	0,869250897
…					

Ovviamente la convergenza è molto meno buona. Sono evidenziate le differenze multiple di 22/7 e quelle di 355/113.

- Numeri primi al denominatore

In maniera analoga a quanto già fatto, definiamo una sequenza $\{b_n\}$ generata aggiungendo, a partire dalla frazione apparente 6/2, un ulteriore termine alle solite condizioni. Abbiamo

n	N	D	ΔN	ΔD	scostamento da π [ppm]
1	6	2			141592,6536
2	16	5	10	3	58407,34641
3	22	7	6	2	1264,489267
4	223	71	201	64	747,5831673
5	355	113	132	42	0,266764189
6	53228	16943	52873	16830	0,255549304
7	61038	19429	7810	2486	0,188717695
8	63168	20107	2130	678	0,173359028
9	63878	20333	710	226	0,168467086
10	66008	21011	2130	678	0,15442269
11	70268	22367	4260	1356	0,128888224
12	73818	23497	3550	1130	0,109860806
13	82338	26209	8520	2712	0,070889194
14	87308	27791	4970	1582	0,051668308
15	90858	28921	3550	1130	0,039226528
16	91568	29147	710	226	0,036853937
17	92988	29599	1420	452	0,03221745
18	97958	31181	4970	1582	0,017048309
19	100088	31859	2130	678	0,011008419
20	102218	32537	2130	678	0,005220245
21	205501	65413	103283	32876	0,003810697
22	313754	99871	108253	34458	0,000934543
23	519610	165397	205856	65526	0,00076054
24	522450	166301	2840	904	0,000693705
25	626443	199403	103993	33102	0,000482613
…					

La convergenza è media tra le due precedenti. Evidenziate le differenze come prima.

- Numeri primi al numeratore e al denominatore

Definiamo infine una sequenza $\{c_n\}$ generata aggiungendo, a partire dalla frazione 5/2, un ulteriore termine alle solite condizioni. Abbiamo

n	N	D	ΔN	ΔD	scostamento da π [ppm]
1	5	2			641592,6536
2	7	2	2	0	358407,3464
3	17	5	10	3	258407,3464
4	23	7	6	2	144121,6321
5	41	13	18	6	12253,50026
6	167	53	126	40	9350,742637
7	211	67	44	14	7661,077753
8	223	71	12	4	747,5831673
9	619	197	396	126	539,3261056
10	757	241	138	44	513,8154155
11	977	311	220	70	113,5539113
12	1109	353	132	42	50,40590029
13	4483	1427	3374	1074	36,94230738
14	5237	1667	754	240	20,96792693
15	5413	1723	176	56	20,81129703
16	9497	3023	4084	1300	11,44287196
17	14423	4591	4926	1568	11,29876514
18	16063	5113	1640	522	7,189946291
19	18061	5749	1998	636	2,811878191
20	30841	9817	12780	4068	1,53614047
21	45751	14563	14910	4746	0,948583956
22	47881	15241	2130	678	0,894518866
23	60661	19309	12780	4068	0,649860962
24	137341	43717	76680	24408	0,13809239
25	162901	51853	25560	8136	0,074568328
…					

La convergenza è la peggiore.

- I quadrati

Procedendo alla stessa stregua, e limitandoci a frazioni che abbiano sia numeratore che denominatore dotati della caratteristica voluta, abbiamo, per i quadrati:

n	N	D	$N^{1/2}$	$D^{1/2}$	scostamento da π [ppm]
1	9	4	3	2	891592,6536
2	16	4	4	2	858407,3464
3	25	9	5	3	363814,8758
4	49	16	7	4	79092,65359
5	256	81	16	9	18901,17357
6	529	169	23	13	11415,1388
7	1521	484	39	22	969,3298813
8	32041	10201	179	101	626,0816851

n	N	D	$N^{1/2}$	$D^{1/2}$	scostamento da π [ppm]
9	47524	15129	218	123	340,7532659
10	66049	21025	257	145	141,9996064
11	87616	27889	296	167	4,391840305
12	19368801	6165289	4401	2483	4,157089467
13	22061809	7022500	4697	2650	3,618345934
14	24930049	7935489	4993	2817	3,143478948
15	27973521	8904256	5289	2984	2,721763934
16	31192225	9928801	5585	3151	2,344749884
17	34586161	11009124	5881	3318	2,005687199
18	38155329	12145225	6177	3485	1,699120032
19	41899729	13337104	6473	3652	1,420590485
20	45819361	14584761	6769	3819	1,166420411
21	49914225	15888196	7065	3986	0,933548072
22	54184321	17247409	7361	4153	0,7194042
23	58629649	18662400	7657	4320	0,521816816
24	63250209	20133169	7953	4487	0,338937291
25	68046001	21659716	8249	4654	0,169182333
…					

- I cubi

Alcune crescentemente buone approssimazioni sono:

$(16/11)^3$ (Δ=64207,229… ppm)
$(19/13)^3$ (Δ=19608,129… ppm)
$(22/15)^3$ (Δ=13370,309… ppm)
$(42/28)^3$ (Δ=1969,8401… ppm)
$(104/71)^3$ (Δ=1266,8841… ppm)
$(186/127)^3$ (Δ=160,6069… ppm)
$(331/226)^3$ (Δ=63,5942… ppm)
$(517/353)^3$ (Δ=17,0686… ppm)
…

- I fibonacci

Potevano mancare? In questo caso si, visto che non c'è niente di meglio che 3/1. Il perché? semplice: per il fatto che i rapporti tra numeri i cui indici distano k unità è pari asintoticamente a Φ^k, che vale Φ, $\Phi +1$, $2\Phi +1$, … ovvero, in cifre approssimativamente 1,618... - 2,618... - 4,236... che non migliorano la grossolana approssimazione vista.

Anche se in maniera diversa da come fatto fino ad ora, è notevolissima l'approssimazione molto semplice

$\sqrt{9,87}$= 3,14165561…. (Δ=62,96… ppm)