Vicine ma non troppo

§1.

Alcune serie convergenti hanno per somma delle quantità trascendenti, la più nota è senz'altro

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \qquad [1]$$

Ci è sufficiente diminuire il denominatore di una unità per avere molto semplicemente che

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{3}{4} \qquad [2]$$

La convergenza della serie [1] è lenta. Considerare i suoi primi 100 termini conduce a uno scarto di 1 parte su 100 rispetto al valore *esatto*; ne occorrono 1000 per aumentare l'approssimazione di un ordine di grandezza, ma siamo solo a tre decimali corretti.

Ricorrere all'aiuto della serie [2] si rivela essere di formidabile utilità dal punto di vista numerico per approssimare il valore di $\zeta(2)$ che è il nome corrente della serie [1].

Abbiamo innanzitutto che

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad [3]$$

Sottraiamo ora la [2] dalla [3], avendo allineato gli indici di somma, e avremo

$$\zeta(2)=1+\frac{3}{4}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2-1)}$$

ovvero

$$\zeta(2)=\frac{7}{4}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2-1)} \qquad [4]$$

Il denominatore ora è diventato di quarto grado, i minuendi sono molto più piccoli e la convergenza è molto più rapida: bastano 9 termini per avere una differenza di 3 parti su 10.000, mentre con 100 termini si hanno ben 6 decimali esatti, e 9 con 1000 termini.

§2.

Attacchiamo la costante di Apéry allo stesso modo; abbiamo per definizione che

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} \qquad [5]$$

Ci è sufficiente diminuire il denominatore di una unità per avere anche in questo caso una serie telescopica, facilmente sommabile

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{4} \qquad [6]$$

Sottraiamo la [6] dalla [5] per avere che

$$\zeta(3) = \frac{5}{4} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3(n^2 - 1)} \qquad [7]$$