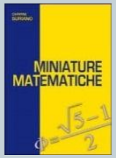
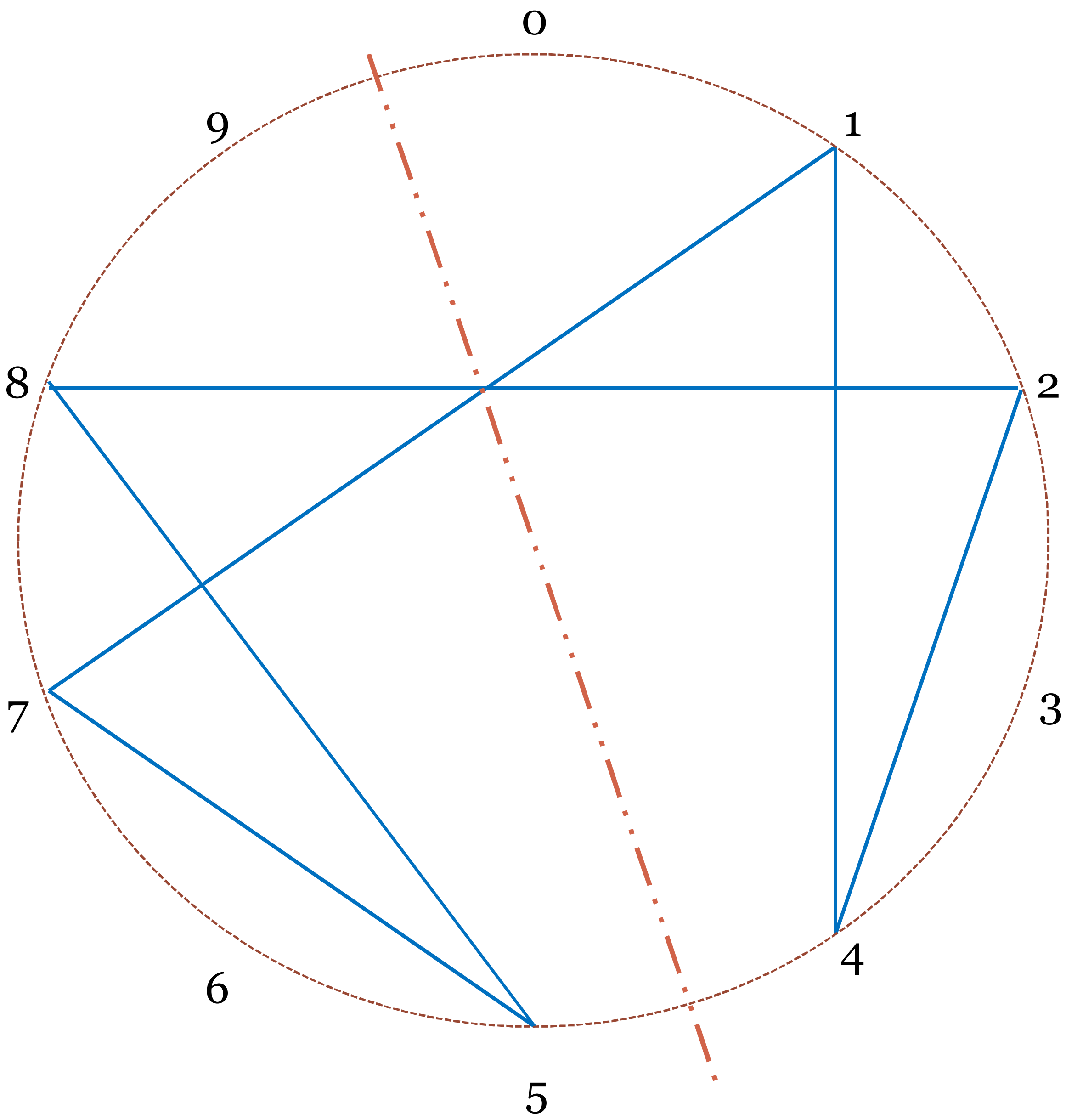
Un settimo



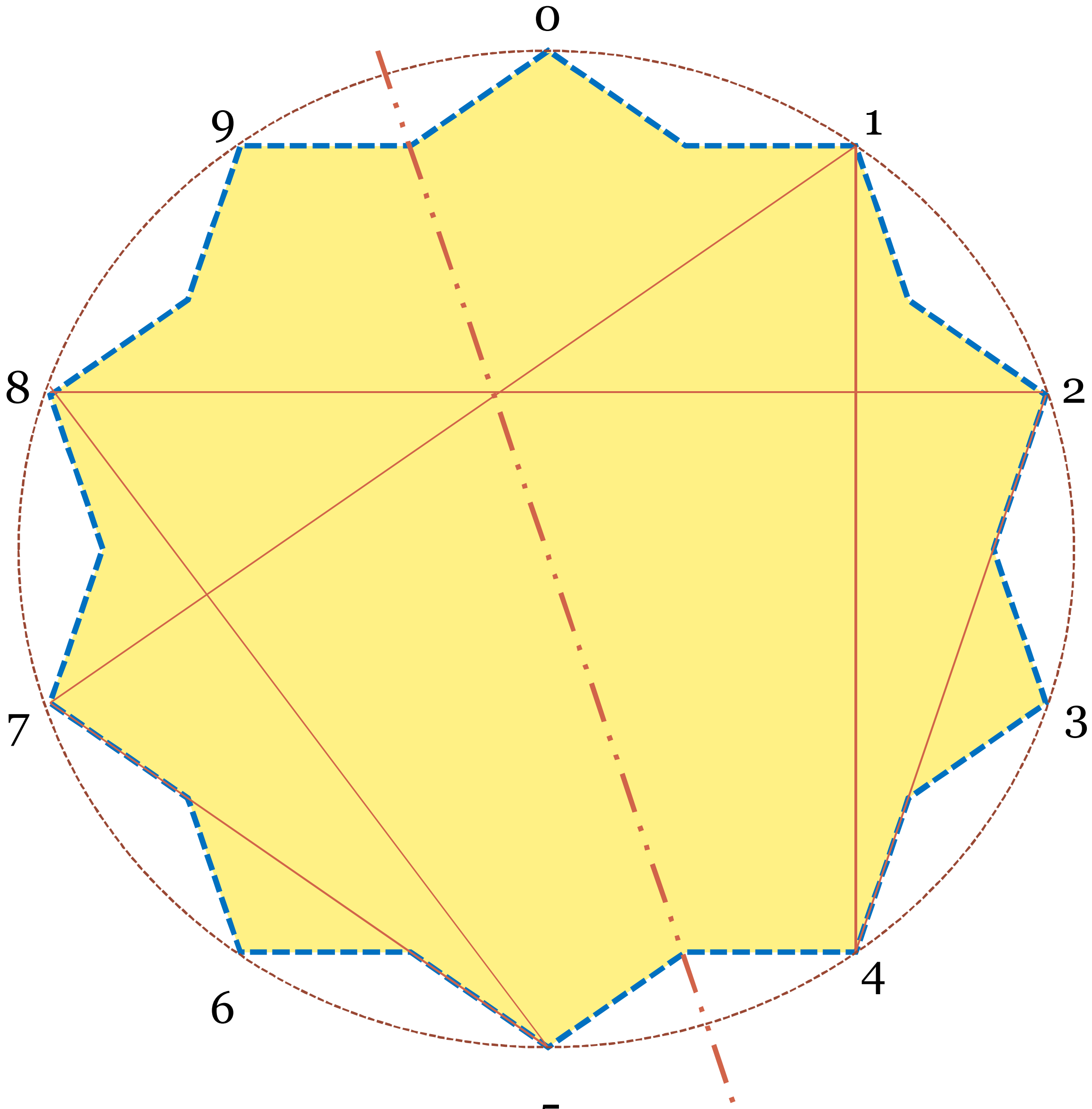
Giugno 2019
CS

- 7 è un numero primo
- il suo reciproco nella rappresentazione decimale è un numero periodico puro
- La lunghezza del periodo è quella massima cioè 6

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$$



La stella delle cifre del periodo


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Moltiplichiamo in successione la frazione per gli altri residui (mod 7)

$$\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$$

$$\frac{3}{7} = 0,\overline{428571}$$

$$\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}$$

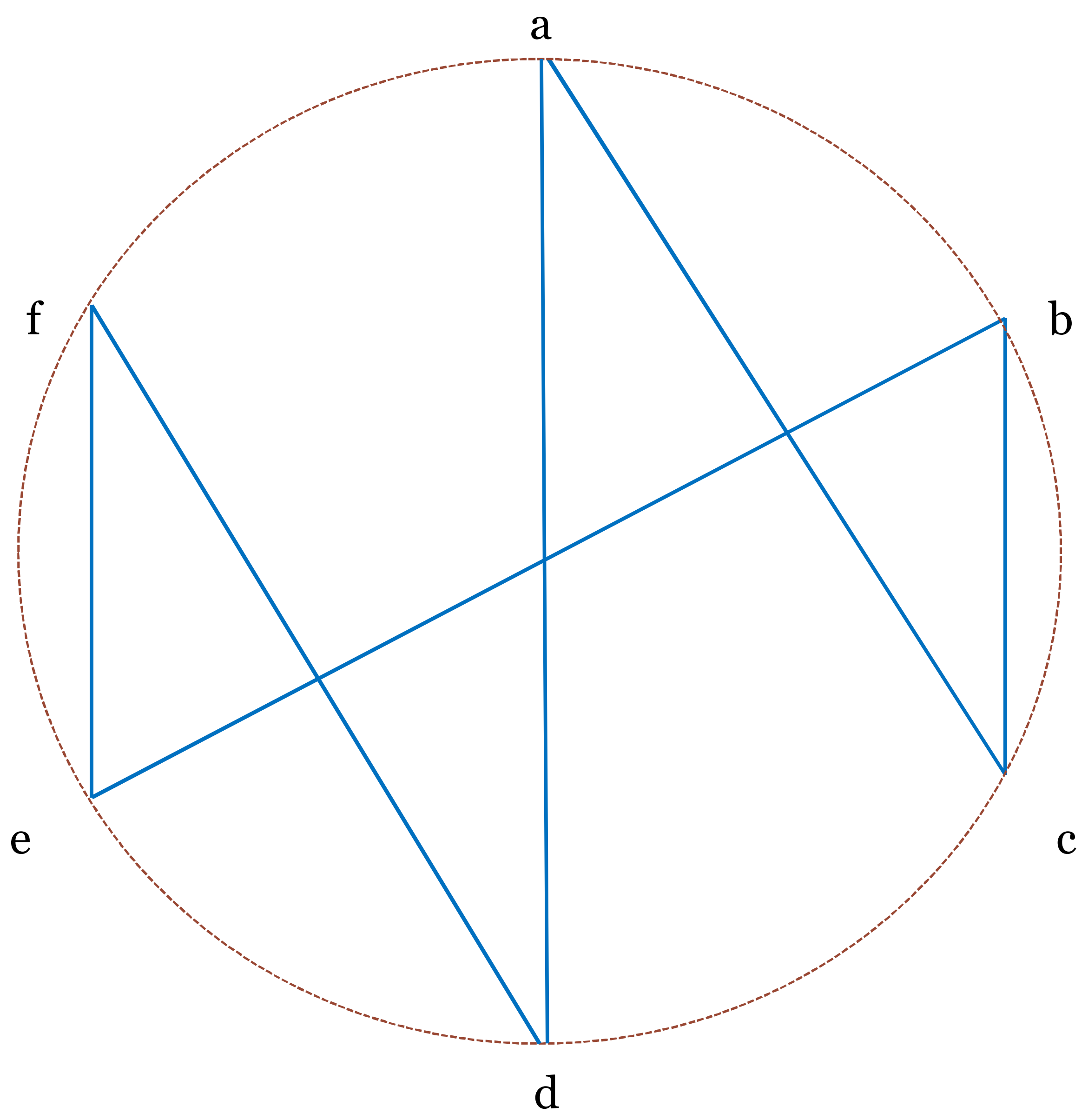
$$\frac{5}{7} = 0,\overline{714285}$$

$$\frac{6}{7} = 0,\overline{857142}$$

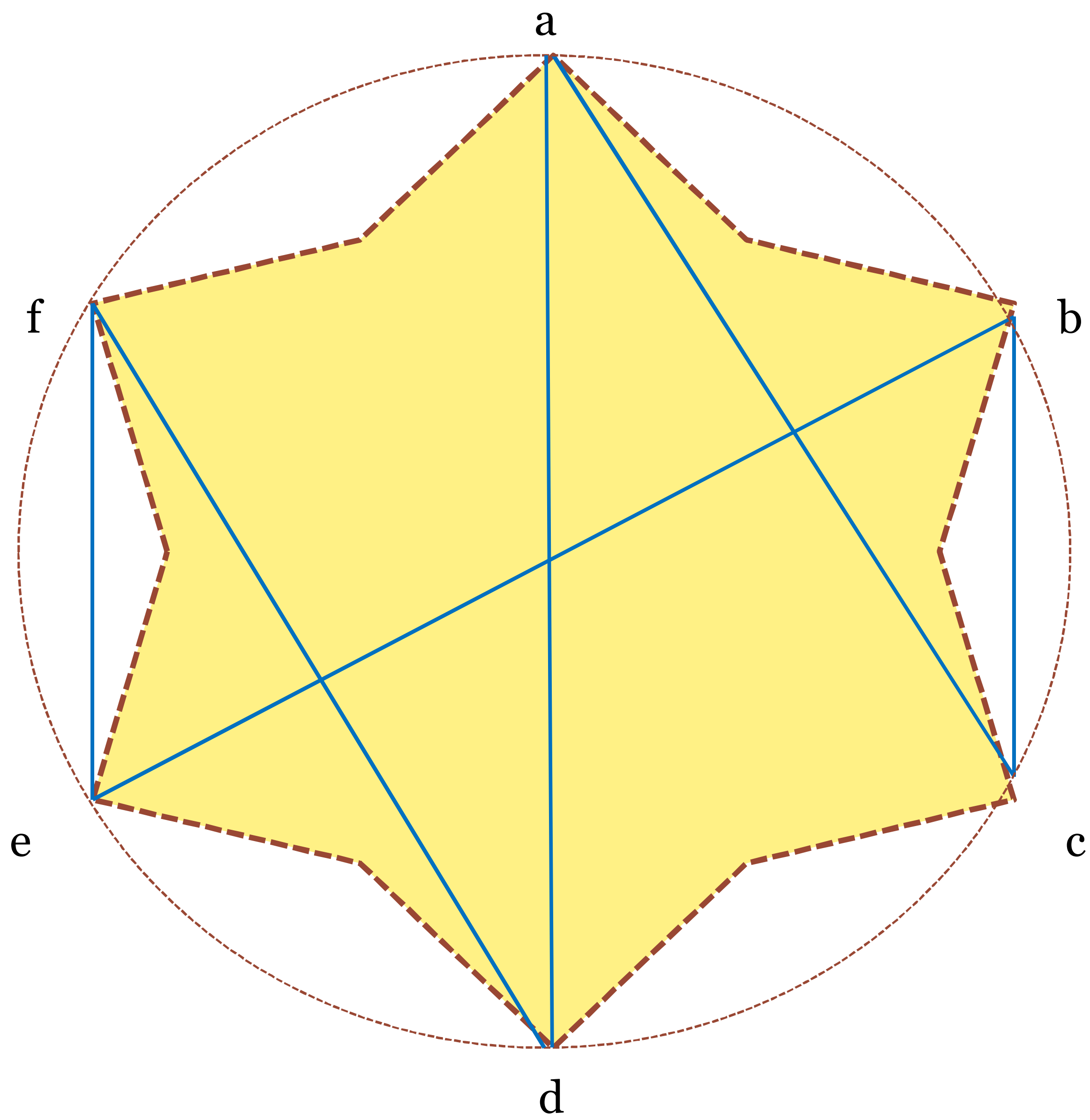
- Rappresentiamo le 6 cifre del periodo di 1/7 con (abcdef)

- Le cifre dei periodi delle 6 frazioni sono disposte realizzando una permutazione di (abcdef) che lascia l'ordine inalterato e sposta la prima cifra come segue (shift register)

	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7
Prima cifra	**a**	**c**	**b**	**e**	**f**	**d**



La stella della prima cifra dei periodi


a
f
b
e
c
d

- La disposizione delle cifre nella rappresentazione decimale delle frazioni proprie di denominatore 7 costituiscono pertanto un gruppo finito di ordine 6

- L’insieme sostegno è rappresentato dall’insieme ordinato *P* delle 6 cifre {142857}

- L’operazione ● che agisce sull’insieme realizza lo spostamento verso sinistra di un posto di ogni cifra. Lo spostamento a sinistra della prima cifra decimale equivale a trasferirla in sesta e ultima posizione

- L’operazione inversa che agisce sull’insieme realizza lo spostamento verso destra di un posto di ogni cifra. Lo spostamento a destra della sesta cifra decimale equivale a trasferirla in prima posizione

Indichiamo l'operazione ● con s

Il gruppo è ciclico; abbiamo

$$s^0 = s^6 = I$$

Chiamiamo le 6 frazioni f_k, $k = 1 \div 6$ valore del numeratore.

$s^0 P \rightarrow 1/7 : f_1$

$s\,P \rightarrow 3/7 : f_3$

$s^2 P \rightarrow 2/7 : f_2$

$s^3 P \rightarrow 6/7 : f_6$

$s^4 P \rightarrow 4/7 : f_4$

$s^5 P \rightarrow 5/7 : f_5$

$$s^{-1} P \rightarrow 5/7 : f_5$$

La tavola di moltiplicazione del gruppo è la seguente

$\bullet$	s^0	s^1	s^2	s^3	s^4	s^5
f_1	f_1	f_3	f_2	f_6	f_4	f_5
f_2	f_2	f_6	f_4	f_5	f_1	f_3
f_3	f_3	f_2	f_6	f_4	f_5	f_1
f_4	f_4	f_5	f_1	f_3	f_2	f_6
f_5	f_5	f_1	f_3	f_2	f_6	f_4
f_6	f_6	f_4	f_5	f_1	f_3	f_2

Il gruppo non è commutativo

ESTENSIONE

- 7 è il numero primo più piccolo che è associato a un gruppo ciclico, e pertanto prende il nome di numero ciclico

- Detto p un numero primo, esso è ciclico se e solo se 10 è una radice primitiva $(\mathrm{mod}\ p)$. In tal caso il periodo del suo inverso ha lunghezza $p-1$ ed il suo gruppo è semplice. In ogni caso la lunghezza del periodo è un divisore di $p-1$

- I primi numeri ciclici (in base 10) sono: 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193, 223, 229, 233, 257, 263, 269, 313, 337, 367, 379, 383, 389, 419, 433, 461, 487, 491, 499, 503, 509, 541, 571, 577, 593, 619, 647, 659, 701, 709, 727, 743, 811, 821, 823, 857, 863, 887, 937, 941, 953, 971, 977, 983

17 è un numero ciclico. Il periodo del suo inverso ha lunghezza 16 ed è 0588235294117647
Rispetto all'operazione di spostamento a sinistra abbiamo la sequenza

$f_1 - f_{10} - f_{15} - f_{14} - f_4 - f_6 - f_9$ - f_5 - $f_{16} - f_7 - f_2 - f_3 - f_{13} - f_{11} - f_8 - f_{12}$

223 è un numero ciclico. Il periodo del suo inverso ha lunghezza 222 ed è

0044843049 3273542600 8968609865 4708520179 3721973094 1704035874 4394618834 0807174887 8923766816 1434977578 4753363228 6995515695 0672645739 9103139013 4529147982 0627802690 5829596412 5560538116 5919282511 2107623318 3856502242 1524663677 13

11 non è un numero ciclico. Il periodo del suo inverso ha lunghezza 2.
Si generano quindi 5 sottogruppi contenenti frazioni di periodo lungo 2 corrispondenti alle frazioni

. 1/11 (associata a 10/11)	periodo 09
. 2/11 (associata a 9/11)	periodo 18
. 3/11 (associata a 8/11)	periodo 27
. 4/11 (associata a 7/11)	periodo 36
. 5/11 (associata a 6/11)	periodo 45

13 non è un numero ciclico. Il periodo del suo inverso ha lunghezza 6.
Si generano quindi 2 sottogruppi .

Al primo sottogruppo, avente periodo 076923, appartengono

- 1/13 – 3/13 – 4/13 – 9/13 – 10/13 – 12/13

Al secondo sottogruppo, avente periodo 153846, appartengono

- 2/13 – 5/13 – 6/13 – 7/13 – 8/13 – 11/13

In ciascun gruppo vi sono solo coppie di elementi coniugati tra loro: f_k, f_{13-k}

La somma delle cifre di ciascun sottogruppo è 27. Se sottraiamo tra loro le cifre di pari posto abbiamo la sequenza
-1; 2; 3; 1; -2; -3

31 non è un numero ciclico. Il periodo del suo inverso ha lunghezza 15.
Si generano quindi 2 sottogruppi contenenti frazioni di periodo lungo 15

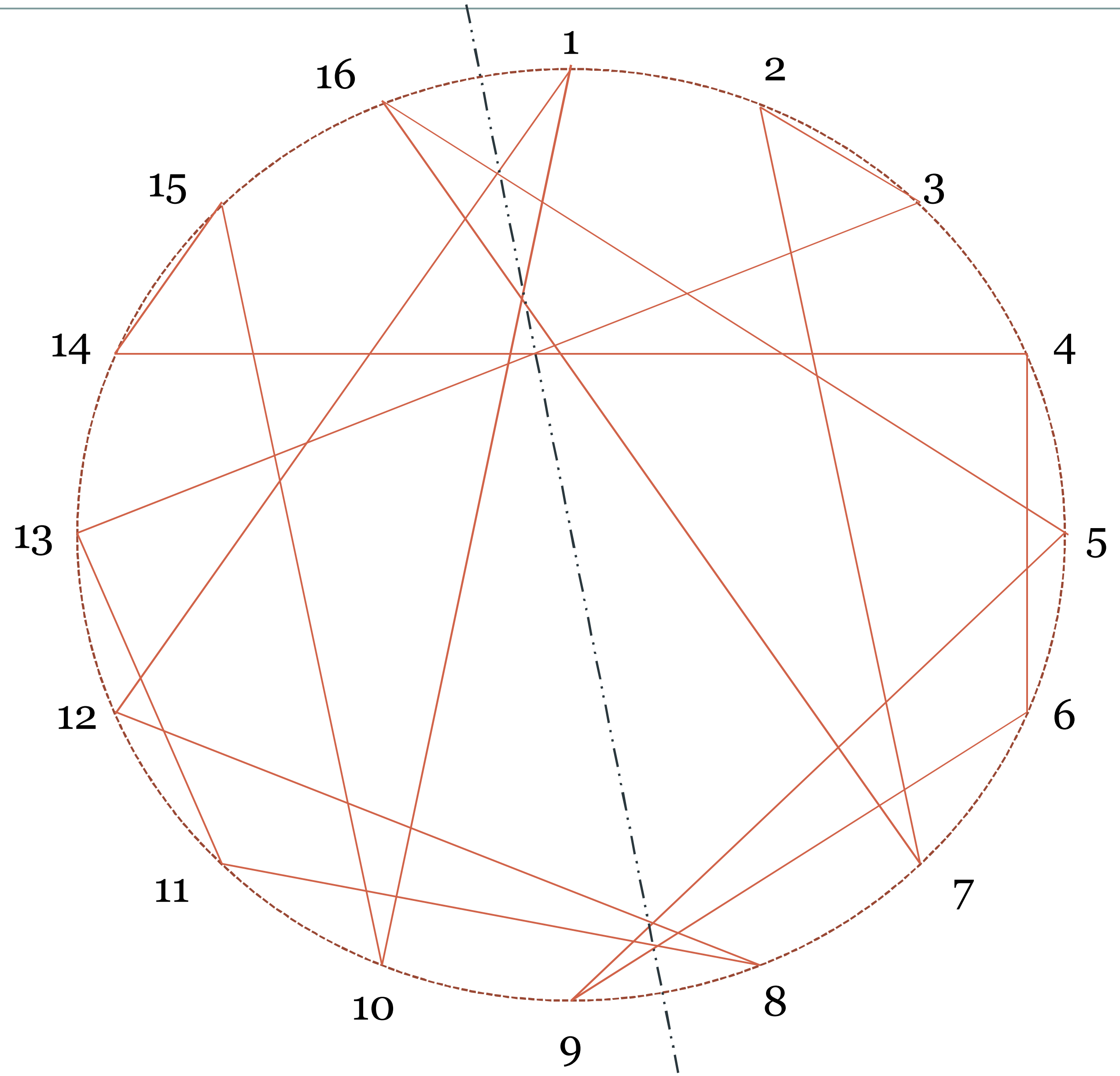
Al primo sottogruppo, avente periodo 032258064516129, appartengono

- 1/31 – 2/31 – 4/31 – 5/31 – 7/31 – 8/31 - 9/31 – 10/31 - 14/31 – 16/31 – 18/31 – 19/31 – 20/31 – 25/31 – 28/31

Al secondo sottogruppo, avente periodo 064516129032258, appartengono

- 3/31 – 6/31 – 11/31 – 12/31 – 13/31 – 15/31 - 17/31 – 21/31 - 22/31 – 23/31 – 24/31 – 26/31 – 27/31 – 29/31 – 30/31

Il coniugato dell'elemento di un sottogruppo appartiene all'altro sottogruppo



La stella della prima cifra dei periodi p=17

33 non è un numero primo, quindi non può essere ciclico. Essendo il prodotto di due fattori abbiamo periodi di lunghezza 1 (in quantità 2) e periodi di lunghezza 2 (in quantità 30) .
Si generano 14 sottogruppi:
I primi due hanno lunghezza 1 e sono

- 11/33=1/3 ; 22/33 – 2/3

Tutti gli altri hanno lunghezza 2 e sono distinti in

- 1/33 – 10/33 (periodo 03) σ=11
- 2/33 – 20/33 (periodo 06) σ=22
- 3/33 – 30/33 (=1-10/11, periodo 09) σ=33
- 4/33 - 7/33 (periodo 12) σ=11
- 5/33 – 17/33 (periodo 15) σ=22
- 6/33 – 27/33 (periodo 18) σ=33
- 8/33 - 14/33 (periodo 24) σ=22

………..

.....

- 12/33 – 21/33 (periodo 36) σ=33
- 13/33 – 31/33 (periodo 39) σ=44
- 15/33 – 18/33 (periodo 45) σ=33
- 16/33 - 28/33 (periodo 48) σ=44
- 19/33 – 25/33 (periodo 57) σ=44
- 23/33 – 32/33 (periodo 69) σ=55
- 26/33 - 29/33 (periodo 78) σ=55

σ è la somma dei denominatori, con frequenza 1,2, 3, 4, 3, 2,1 simmetrica rispetto a σ=33 includendo il primo sottogruppo.

La somma delle cifre dei periodi a due cifre è 3-6-9-12-15 con frequenza 4-6-10-6-4; la sequenza è aperta e chiusa da 1 e 1 corrispondenti alla somma delle cifre a periodo a una sola cifra. La sequenza corrisponde ai coefficienti binomiali di $(a+b)^4$.

Consideriamo 121 che non è un numero primo, quindi non può essere ciclico. Essendo il prodotto di due fattori abbiamo periodi di lunghezza 2 (in quantità 10) e periodi di lunghezza 22 (in quantità 5) .
Si generano 15 sottogruppi:
I primi dieci hanno lunghezza 2 e hanno per numeratore i multipli di 11;

Gli altri hanno lunghezza 22, hanno tutti σ=99 e sono

- $(1+11k)/121 - (10+11k)/121$ (periodo 0082644628099173553719)
- $(2+11k)/121 - (9+11k)/121$ (periodo 0165289256198347107438)
- $(3+11k)/121 - (8+11k)/121$ (periodo 0247933884297520661157)
- $(4+11k)/121 - (7+11k)/121$ (periodo 0330578512396694214876)
- $(5+11k)/121 - (6+11k)/121$ (periodo 0413223140495867768595)

Le 22 cifre del periodo sono distribuite con la regolarità riportata in tabella: sono tutte presenti 2 volte e due, che si muovono verso le cifre medie al progredire del tipo, sono presenti 3 volte

	CIFRA									
FREQUENZA NEL TIPO	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3
	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2
	2	2	3	2	2	2	2	3	2	2
	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2
	2	2	2	2	3	3	2	2	2	2

Rispetto ai numeratori che sono quadrati dei numeri primo abbiamo le seguenti lunghezze l_k dei rispettivi periodi

p^2	9	49	121	169	289	361	529	961
l_1	1	42	22	78	272	342	506	465
l_2	-	6	2	6	16	18	22	15
l_1/p	1/3	6	2	6	16	18	22	15

Il rapporto l_1/l_2 vale sempre p

Consideriamo ancora 169 che non è un numero primo, quindi non può essere ciclico. Essendo il prodotto di due fattori abbiamo periodi di lunghezza 6 (in quantità 12) e periodi di lunghezza 78 (in quantità 156) .

I primi hanno tutti σ=27 , i secondi hanno σ=351. in relazione alla distribuzione delle 10 cifre, questi ultimi si presentano in 13 nuclei di 12 unità ciascuna, intervallate dalle frazioni di numeratore 13*k*.

Le cifre 2, 4, 5, 7 (complementari rispetto a 9) sono sempre presenti 8 volte nel periodo .
Le cifre 0, 3, 6, 9 in metà dei casi 7 volte, in metà in 8
Le cifre 1 e 8 in metà dei casi 7 volte, in metà in 8 in corrispondenza dei medesimi numeratori.
Ne nasce lo schema seguente.

Denominatore 169

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	7	8	8	8	8	8	8	7	8
7	9	8	7	8	8	7	8	9	7
8	7	8	8	8	8	8	8	7	8
8	7	8	8	8	8	8	8	7	8
7	9	8	7	8	8	7	8	9	7
7	9	8	7	8	8	7	8	9	7
7	9	8	7	8	8	7	8	9	7
7	9	8	7	8	8	7	8	9	7
8	7	8	8	8	8	8	8	7	8
8	7	8	8	8	8	8	8	7	8
7	9	8	7	8	8	7	8	9	7
8	7	8	8	8	8	8	8	7	8

Assi di simmetria

Se si guarda la tabella precedente come una matrice abbiamo che sono non nulli 48 determinanti delle 99 sottomatrici di ordine 2.

12 hanno determinante ± 23
24 hanno determinante $\pm\ 8$
12 hanno determinante ± 16

La semisomma di tutti i determinanti in valore assoluto è 330

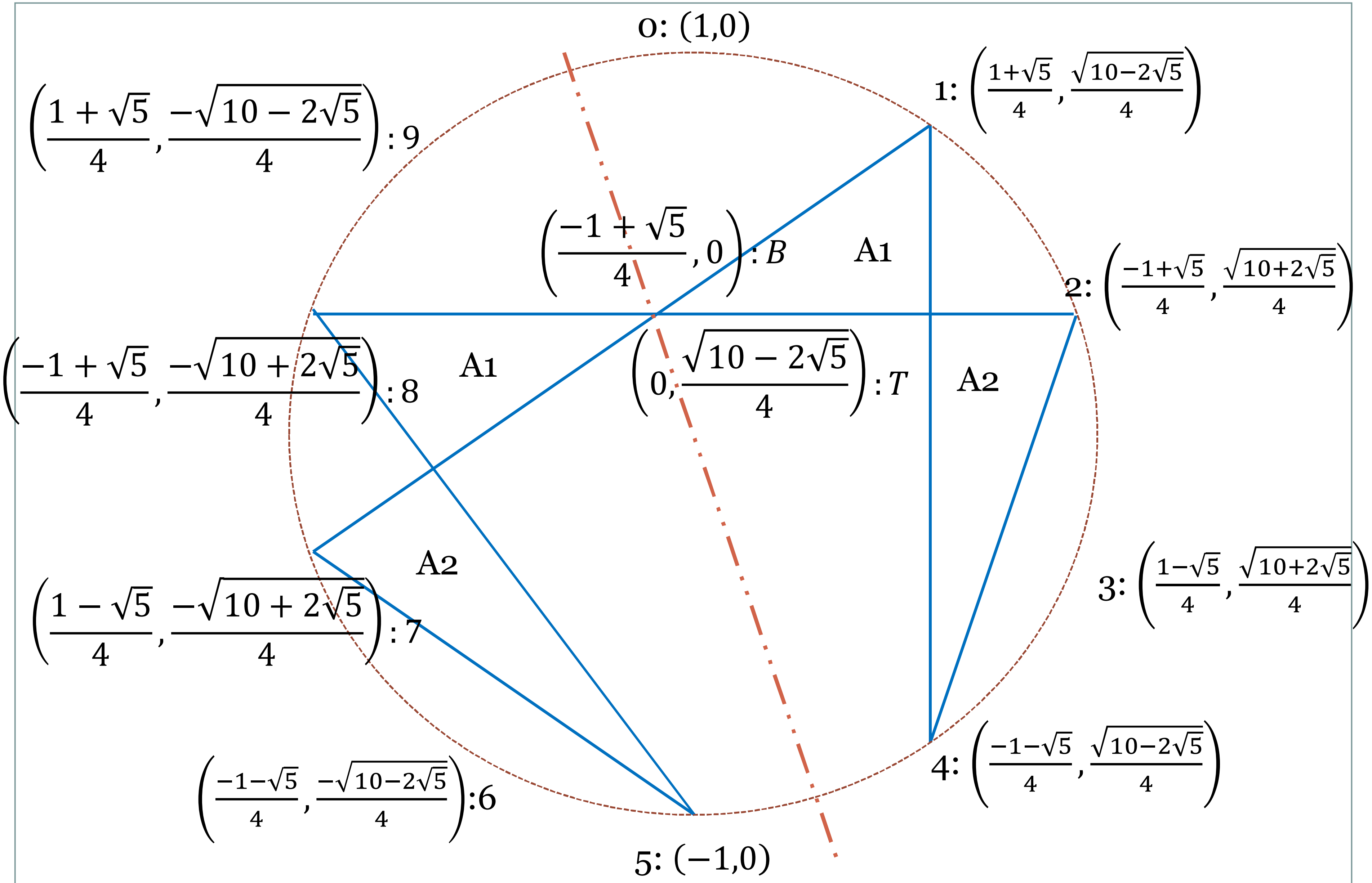
Riconsideriamo due famiglie di casi: $1/7^n$; $1/13^n$. La tabella delle lunghezze massime e della somma delle cifre dei rispettivi periodi basici è

p^n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
7	6	42	294	2.058	14.406	100.842	705.894
13	6	78	1.014	13.182	171.366	2.227.758	28.960.854
$\boldsymbol{\sigma(7)}$	27	189	1.323	.9.261	64.827	453.789	3.176.523
$\boldsymbol{\sigma(13)}$	27	351	4.563	59.319	771.147	10.024.911	130.323.843

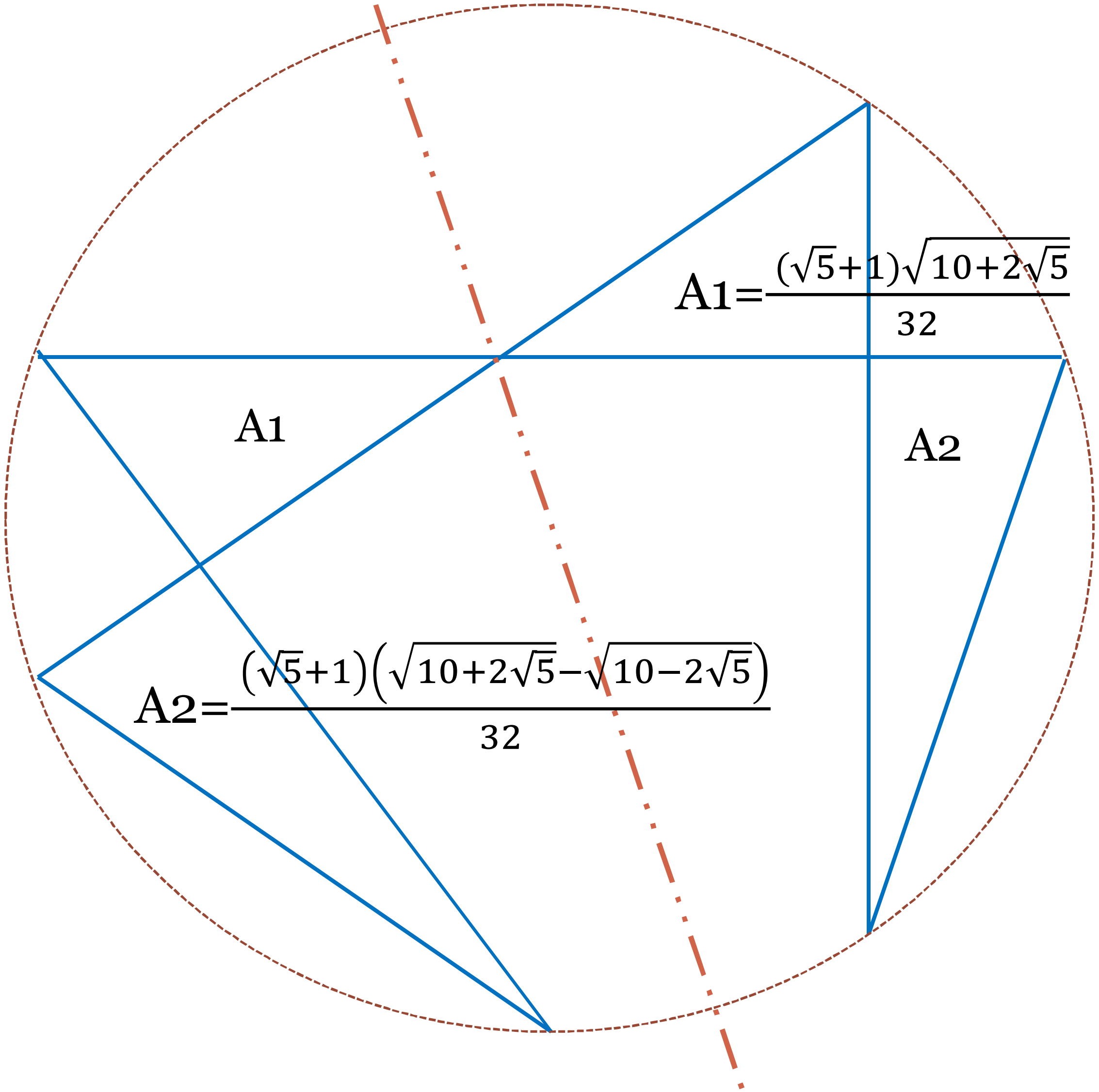
Se $l(p)$ e $\sigma(p)$ sono la lunghezza massima e la somma delle cifre del relativo periodo basico per un denominatore p prodotto di primi (diversi da 2 e 5) allora le stesse grandezze per una sua potenza n sono

$$p^{n-1}\, l(p) \quad \text{e} \quad p^{n-1}\sigma(p)$$

AREE



La stella delle cifre del periodo



Le aree A1 e A2 stanno tra loro nel rapporto aureo $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$