‘A LUAMM’ E ‘A METTIMM’

Qualche giorno fa mio fratello ha chiesto, mentre eravamo a tavola per il pranzo, che gli fosse spiegato, in parole semplici e chiare, cosa fossero la derivata e l’integrale.

La mia fantasia si è posta subito in moto per fornire una risposta convincente, aderente alla richiesta ma comunque rigorosa. L’impresa non mi è stata semplice e, al momento stesso in cui scrivo, non ritengo di essere giunto a completarla.

Calcolare, o eseguire o …. fare una derivata o un integrale significa comunque eseguire una operazione matematica. Potrei declinare diverse definizioni, da quella più astratta di Operatore, con determinate caratteristiche per ciascuna delle due, a una più tecnica come limite del rapporto incrementale per l’una o limite di somme di prodotti su intervalli infinitesimi per l’altra. Ma avrei fallito più che miseramente: leggiti un qualsiasi testo di matematica.

Qui occorre mettersi in gioco.

Quel che è certo è che, utilizzando una terminologia meramente aritmetica, la derivazione si attua effettuando, in sequenza, una sottrazione e poi una divisione; d’altro canto l’integrazione eseguendo una prodotto e quindi una somma. In entrambi i casi occorre maneggiare numeri molto piccoli.

Nella derivata il denominatore della divisione deve essere un numero molto piccolo, nell’integrale il fattore di integrazione deve parimenti essere un numero molto piccolo.

Consideriamo una grandezza qualsiasi, ad esempio una distanza, oppure la temperatura o, in maniera astratta, una funzione numerica. La derivata allora esprime una proprietà locale di quella grandezza, ovvero qualcosa che vale in un intervallo piuttosto limitato. Consideriamo invece la stessa grandezza: l’integrale esprime un comportamento medio di quella grandezza in un intervallo che può essere grande a piacere, addirittura infinito. Facciamo l’esempio di una strada: se vogliamo descriverne il comportamento in termini di salite, dossi, discese, falsopiani allora l’operazione che consente di comprendere tale proprietà è la derivata, essendo quella proprietà di natura appunto locale: una strada può essere in salita in un certo tratto, anche piccolo, raggiunge l’apice e trasformarsi in una discesa e poi, raggiunto il fondovalle, riprendere a salire. Se invece vogliamo conoscere quanto sarà il consumo di carburante per compiere quello stesso tratto, allora dobbiamo eseguire una operazione che coinvolge un integrale, essendo il consumo correlato ad una proprietà globale del tragitto stesso.

Con le semplici premesse aritmetiche possiamo abbastanza facilmente convincerci che derivazione ed integrazione sono due operazioni delle quali l'una è l'inversa dell'altra: data una certa funzione, che esprime una relazione numerica tra due grandezze, se ne calcolo la funzione integrale e di quest'ultima ne calcolo la funzione derivata, ottengo la funzione di partenza. D'altro canto se prima eseguo la derivazione di quella stessa funzione e sul risultato eseguo l'integrazione, ottengo ancora una volta la funzione di partenza. I puristi diranno: a meno di una costante che possiamo scegliere a piacimento: è vero, ma quello che conta nella vita non sono i valori assoluti quanto quelli relativi ad un certo riferimento, scelto anch'esso arbitrariamente; pertanto la costante additiva ci lascia del tutto indifferenti.

Ho detto molte cose, ma ho del tutto eluso la domanda di fondo: cosa è una derivata, cosa è un integrale. Non mi dilungo affatto a sottolinearne l'utilità pratica, che è enorme ed è sotto gli occhi di tutti, e che comunque non occorre a giustificarne la bellezza e il fascino, quanto piuttosto la potenza. Personalmente preferirei che non servissero a nulla di pratico, ma purtroppo non è così.

E allora provo a dire quanto segue. Supponiamo di avere una certa grandezza, ad esempio il tempo, ed una altra quantità che muta al variare della prima, nel nostro caso al trascorre del tempo.

Allora dico che la derivata misura il grado di cambiamento di quella quantità. Se la suddetta quantità aumenta nel tempo diremo che la derivata è positiva, se diminuisce, che la derivata è negativa, se resta immutata che la derivata è nulla. Si intende in un certo intervallo: la temperatura di un luogo nella giornata, il peso di una persona in un anno, la forza che spinge un corpo lungo la sua traiettoria di spostamento. Più è grande e positiva la derivata, più rapidamente cresce quella quantità, al contrario decresce rapidamente se la derivata è grande ma negativa. Quanto più la derivata diventa piccola e si avvicina allo zero, tanto più quella quantità rallenta la crescita o la decrescita, fino a rimanere costante in un certo tratto, quando la derivata si annulla, e diciamo che la quantità è stazionaria, come se fosse ferma. Allora la strada non scende né sale e siamo in perfetta pianura, in alto o in quota che sia.

Dico d'altra parte che l'integrale misura l'accumulazione di quella quantità pesata con la grandezza dalla quale dipende. Non è la semplice somma, bensì la media della grandezza data moltiplicata per l'estensione nella quale quella grandezza è stata misurata. È il motivo per il quale l'integrazione smussa le particolarità, annulla o quasi le eccezioni. Un valore molto grande, se insiste su intervallo piccolo contribuisce altrettanto quanto un valore molto piccolo che insiste su un intervallo ampio. Un rettangolo alto dalla base piccola è altrettanto esteso quanto lo stesso rettangolo basso dalla base molto ampia. L'estensione è esattamente la medesima se il rettangolo viene ruotato in modo da scambiare la base del primo con l'alteza del secondo e viceversa.

Nel caso della forza che spinge un corpo nella direzione dello spostamento, l'integrale della forza lungo la traiettoria fornisce il lavoro compiuto da quella forza. Se consideriamo la densità di un corpo non omogeneo, il suo integrale sul volume occupato da quel corpo fornisce il peso totale del corpo. Le applicazioni nel campo della fisica sono immense e sono le più evidenti. Da questi esempi si vede che l'integrale estende il concetto di moltiplicazione quando una determinata quantità varia in rapporto alla grandezza rispetto a cui viene misurata. In geometria, e si tratta della definizione più semplice di integrale, in effetti si sa calcolare con esattezza solo l'area del rettangolo, come prodotto della base per l'altezza, il triangolo si sa quadrare, ricordiamo questo termine, lo troveremo nel seguito, solo perché la sua area è la metà del rettangolo di pari base ed altezza, come noto. Se abbiamo invece un perimetro qualsiasi di forma mistilinea o solo curvilinea l'area non è conoscibile con metodi elementari, se non tagliando la figura a fettine sottilissime, che, in quanto tali, sono molto vicine ad essere un rettangolo, allora si moltiplica la lunghezza di ciascuna strisciolina per la sua piccolissima ampiezza e si sommano tutti i prodotti così ottenuti. Il risultato sarà l'area della figura, per quanto complessa, esso sarà tanto più vicino al vero quanto maggiore è il numero di striscioline impiegate e quindi minore la loro larghezza. Analogo discorso va fatto per determinare con esattezza la lunghezza di una curva dalla forma qualsiasi: ricorrendo al teorema di Pitagora si calcola il piccolo elemento di lunghezza come ipotenusa del triangolo rettangolo i cui cateti sono un minuscolo intervallo del parametro della curva e la relativo minuscolo estendersi della curva stessa: la somma di tutte queste micro-ipotenuse integrate rispetto al suddetto parametro fornisce la lunghezza della curva nell'intervallo voluto.

Pur essendo una operazione più complessa, l'integrazione è storicamente nata prima, ed i lavori di Archimede lo testimoniano. Nella forma attuale il calcolo, che viene chiamato appunto integro-differenziale, si è sviluppato nel corso dei secoli tra il XVII e XVIII.

Ora, nell'ambito delle funzioni cosiddette elementari, ovvero quelle esprimibili mediante le quattro operazioni aritmetiche, le estrazioni di radici, le funzioni trigonometriche dirette ed inverse, quelle logaritmiche e le esponenziali, è possibile effettuare l'operazione di derivazione sempre. Ciò è dovuto al fatto che, dato un insieme di funzioni ed in particolare due di esse, si è in grado di calcolare la derivata di

≡ Somma delle due
≡ Prodotto delle due
≡ Rapporto delle due
≡ Composizione delle due mediante tutte le altre operazioni elencate in precedenza

Questo amplissimo ventaglio di capacità della operazione rende possibile derivare qualsiasi funzione, per quanto complessa sia, se è definita come appena detto. Più complicato, ma praticamente fattibile quasi sempre è derivare funzioni espresse mediante serie o integrali. Tutta questa abbondanza e ricchezza ha però un prezzo: non c'è letteratura sulle derivate; le tavole di derivate si esauriscono in poche pagine e c'è poco altro da dire anche in virtù della connotazione locale di cui abbiamo già detto. Né d'altronde la questione viene resa più complicata dall'essere in presenza di una soltanto o di più variabili, dato che in questo secondo caso basta considerare di volta in volta una sola come variabile efficace e trattare le altre come parametri e sommare il tutto per ottenere il differenziale totale.

Ora, con queste premesse e considerando il fatto che l'integrazione è il semplice inverso della derivazione potrebbe apparire semplice, anche se complesso, appunto compiere la nostra seconda operazione. Bene è tutt'altro che così. A parte le stesse tabelle di poche pagine che, lette da sinistra a destra, a partire da una funzione ce ne dicono la sua derivata, mentre lette da destra a sinistra ci dicono di una funzione il suo integrale, cosiddetto indefinito per la presenza della famosa costante additiva cui abbiamo fatto cenno, tutto il resto è buio fitto.

Se di due funzioni infatti sappiamo calcolare le rispettive funzioni integrali, allora siamo certi di saperlo fare anche per la loro somma o per la loro differenza. Ma se già le moltiplichiamo o le dividiamo tra loro siamo tutt'altro che confidenti di poterlo in genere fare. Anzi, lo si riesce a fare solo per i polinomi e per le funzioni trigonometriche che restano tali appunto se soggette alle due operazioni suddette. Ma se moltiplichiamo un polinomio per un esponenziale siamo già nei guai.

A parte tecniche potenti, ma di limitata applicazione, quali, su tutte, l'integrazione per parti o la scomposizione in fratti semplici per le funzioni razionali fratte, in genere trovare la primitiva, si chiama così la funzione integrale di un'altra data, è un'impresa quasi sempre destinata al fallimento. L'intera questione ha un nome che abbiamo detto in maniera fuggente: integrazione indefinita.

Ma quando un integrale indefinito viene valutato tra due estremi, detti appunto di integrazione, smette di diventare una funzione e si trasforma in un numero reale che rappresenta la quantità effettiva come esemplificata in precedenza, ovvero una lunghezza, un'area, un lavoro e così via.

Qui viene il bello, ma davvero! Il calcolo di un integrale definito che, se si conosce la primitiva, equivale alla differenza di quest'ultima calcolata nei due estremi di integrazione, si riesce ad effettuare in un numero enorme di casi senza passare o addirittura conoscere o essere in grado di trovare la primitiva.

Si tratta di una operazione sconvolgente, equiparabile al fatto di riuscire a raggiungere la vetta di una montagna impervia senza arrampicarvici affatto, quindi evitando anfratti, crepacci, dirupi e burroni: un po' come arrivarci volando. C'è però da pagare il prezzo, salato, del biglietto, ovvero trovare l'appropriato mezzo libratorio.

E allora ecco il fiorire di innumerevoli tecniche di aggressione al problema, che vanno dallo sviluppo in serie di potenze, al metodo di sostituzione o di confronto fino a cimentarsi con la più ineffabile di tutte: il ricorso all'integrazione mediante variabile complessa.

Si tratta di collegare due punti di un certo paesaggio, abbiamo fatto il paragone della cima della montagna da raggiungere partendo dal fondovalle, passando per una escursione in un'altra dimensione oppure in un altro pianeta, per giungere di nuovo infine sulla terra.

La potenza del calcolo complesso è difficilmente sovrastimabile e rende possibile, ad esempio attraverso il calcolo dei residui o dell'integrazione lungo un certo contorno, di ottenere risultati altrimenti affatto concepibili, addirittura.

Va molto al di là di queste note portare anche l'esempio più semplice, ma l'utilizzo dell'arsenale messo in tal modo a disposizione fa sì che, se le tavole delle derivate assommano a non più di tre-quattro pagine (non ricordo di averne mai viste cinque) e quelle degli integrali indefiniti a circa 250 pagine della raccolta di Prudnikov, Brychov e Marichev (che suggerisco a tutti di recuperare), le tavole di integrali definiti, nello stesso testo, occupano circa 1450 pagine, senza contare le oltre 550 dedicate alle trasformate integrali, che sono ancora integrali definiti. In Gradshteyn e Ryzhik la proporzione, sempre espressa in numero di pagine, è di 190 a 590. Erdélyi, del progetto Bateman, dà oltre 800 pagine di trasformate integrali.

Accanto a questi atlanti si stanno moltiplicando libri interamente dedicati al calcolo di integrali definiti, come l'accattivante testo di Nahin ma, soprattutto, quello di Boros e Moll, di altissimo livello. I loro titoli suonano come specchietti per le allodole, ma entrambi i lavori mantengono ciò che promettono, e forse vanno anche al di là.

Purtroppo in italiano non c'è quasi nulla e le cose che sono più vicine alla nostra lingua sono ancora il latino di Eulero ed il francese di Lagrange, ma questa è un'altra storia.

FINE