La lemniscata κ-deformata

Seguendo i lavori di Kaniadakis [1], [2] studiamo alcune proprietà della lemniscata κ-deformata definita a partire dall'equazione non trasformata

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2 \qquad (1)$$

Essa si ottiene imponendo la consueta condizione che definisce la lemniscata come il luogo geometrico dei punti per i quali è costante il prodotto delle distanze da due punti dati. Laddove si intenda la somma κ-deformata come

$$x \overset{\kappa}{\oplus} y = x\sqrt{1+\kappa^2 y^2} + y\sqrt{1+\kappa^2 x^2} \qquad (2)$$

col che

$$x \overset{\kappa}{\oplus} x = 2x\sqrt{1+\kappa^2 x^2}$$

e

$$x^2 \overset{\kappa}{\oplus} y^2 = x^2\sqrt{1+\kappa^2 y^4} + y^2\sqrt{1+\kappa^2 x^4} \qquad (3)$$

Otteniamo la κ-deformata della (1):

$$\left(x^2\sqrt{1+\kappa^2 y^4} + y^2\sqrt{1+\kappa^2 x^4}\right)^2 = x^2\sqrt{1+\kappa^2 y^4} - y^2\sqrt{1+\kappa^2 x^4} \qquad (4)$$

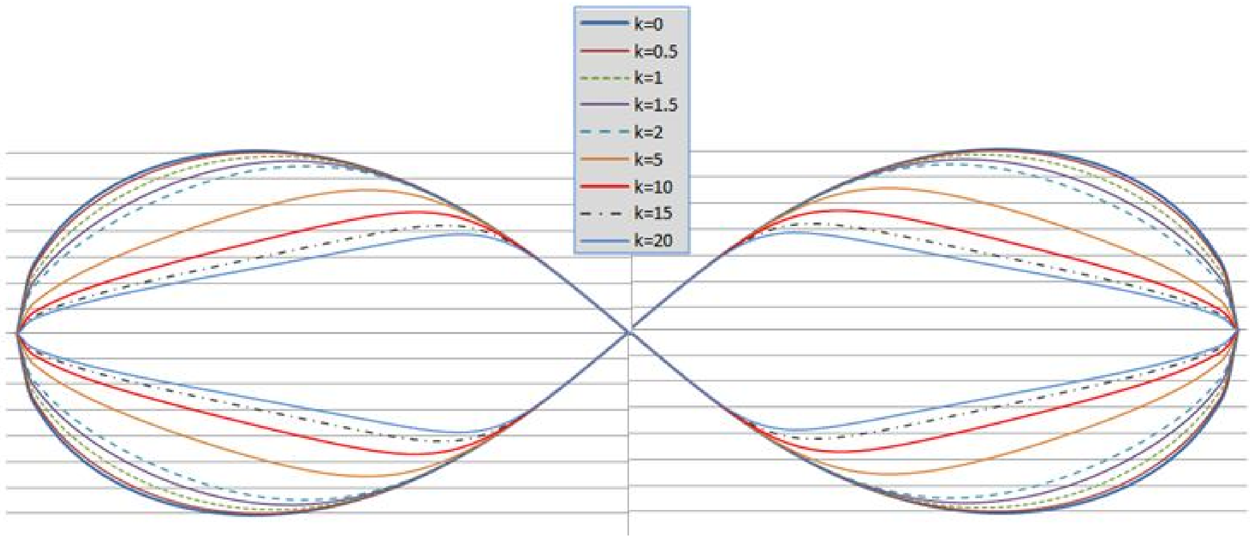
In coordinate polari

$$\rho^2\left(\cos^2\theta\sqrt{1+\kappa^2\rho^4\sin^4\theta} + \sin^2\theta\sqrt{1+\kappa^2\rho^4\cos^4\theta}\right)^2 = \cos^2\theta\sqrt{1+\kappa^2\rho^4\sin^4\theta} - \sin^2\theta\sqrt{1+\kappa^2\rho^4\cos^4\theta} \qquad (5)$$

Data la simmetria, definiamo per parametro di deformazione la condizione

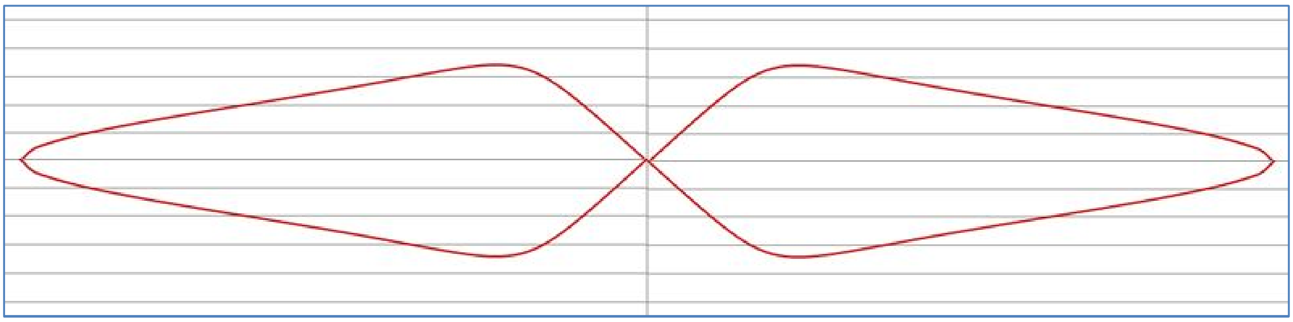
$$0 \le \kappa \qquad (6)$$

Nessuna delle due espressioni si scrive in forma esplicita, ciononondimeno è possibile tracciare l'aspetto deformato della lemniscata ed inferirne alcune proprietà.



$$\left(x^2\sqrt{1+\kappa^2 y^4}+y^2\sqrt{1+\kappa^2 x^4}\right)^2 = x^2\sqrt{1+\kappa^2 y^4}-y^2\sqrt{1+\kappa^2 x^4}$$

Aspetto delle lemniscate κ-deformate (κ fino a 20)



Aspetto della lemniscata κ-deformata (κ=30)

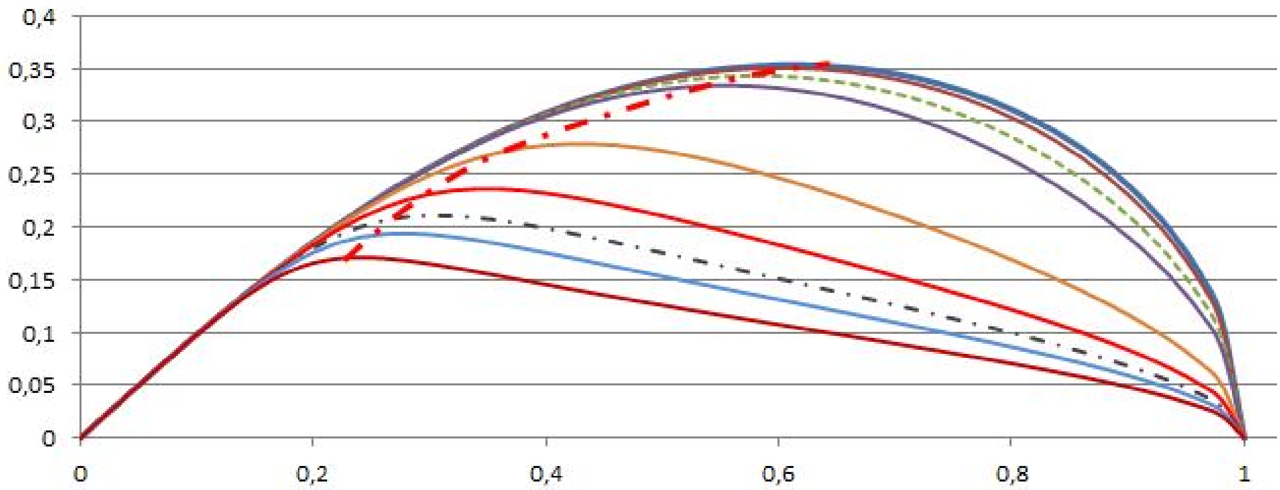
All'aumentare del valore del parametro di deformazione la curva si schiaccia in maniera sempre più irregolare, l'area della superficie delimitata dalla curva e la sua lunghezza diminuiscono; il punto di massimo si sposta verso l'origine.

Nella tabella seguente sono mostrati i valori suddetti.

	κ=0	κ=0.5	κ=1	κ=1.5	κ=2	κ=5	κ=10	κ=15	κ=20	κ=30
Area	1	0,988	0,960	0,927	0,893	0,743	0,609	0,532	0,481	0,414
Lunghezza	5,245	5,237	5,214	5,179	5,141	4,965	4,824	4,751	4,705	4,647
x_{MAX}	0,62	0,60	0,58	0,56	0,54	0,42	0,34	0,30	0,28	0,24
y_{MAX}	0,353	0,351	0,343	0,334	0,324	0,279	0,236	0,211	0,194	0,171

Andamento dei calori caratteristici al variare del parametro di deformazione

Dal momento che la figura si schiaccia sempre di più all'aumentare del valore di κ, l'area limite, quando esso va all'infinito, è nulla, ad essa corrisponde una lunghezza totale di 4 (la somma dei quattro segmenti, a due a due sovrapposti, tra l'origine e l'estremo di ascissa ± 1).



Spostamento del punto di quota massima (linea tratteggiata rossa)

….

[1] Kaniadakis G. (Politecnico di Torino), Physica A 296 (2001) 405-425
[2] Kaniadakis G. (Politecnico di Torino), Physical Review E 66 (2002) 056125 1-17