Integrali algebrici

Sia data la funzione algebrica

$$\frac{P(x)}{\sqrt[r]{R(x)}}$$

dove P, R sono polinomi in x e r è un numero razionale.

Allora condizione necessaria e sufficiente per cui

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt[r]{R(x)}} dx = S(x)$$

sia una funzione algebrica è che esista un polinomio $\theta(x)$ tale che

$$P(x)R(x) = R(x)\frac{d\theta(x)}{dx} - \frac{\theta(x)}{r}\frac{dR(x)}{dx}$$

Se una tale funzione $\theta(x)$ esiste, allora, detto p il grado del polinomio P, il grado di θ sarà $p + 1$.

Sussisterà in tal caso, a meno di una costante additiva, l'uguaglianza

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt[r]{R(x)}} dx = \frac{\theta(x)}{\sqrt[r]{R(x)}}$$

che soddisfa il principio di permanenza di Laplace.

Differenziando questa equazione abbiamo

$$\frac{P(x)}{\sqrt[r]{R(x)}} = \frac{\theta'(x)}{\sqrt[r]{R(x)}} - \frac{\theta(x)}{r}\frac{R'(x)}{R(x)^{\frac{1}{r}-1}}$$

ossia

$$P(x)R(x) = R(x)\theta'(x) - \frac{\theta(x)}{r}R'(x)$$

Se $r = 1$ allora, senza conoscere le radici del polinomio R, siamo in grado di dire che

$$\int \frac{P(x)}{R(x)} dx = \frac{\theta(x)}{R(x)}$$

ove θ è dato dalla soluzione dell'equazione differenziale

$$P(x)R(x) = R(x)\theta'(x) - \theta(x)R'(x)$$

$$[\theta'(x) - P(x)]R(x) = \theta(x)R'(x)$$

In realtà la precedente è una equazione differenziale solo apparentemente. Se infatti è

$$P(x) = x^p + ax^{p-1} + bx^{p-2} + \cdots + gx + k$$

$$R(x) = x^s + \alpha x^{s-1} + \beta x^{s-2} + \cdots + \mu x + \sigma$$

allora deve essere

$$\theta(x) = tx^{p+1} + ux^p + vx^{p-1} + \cdots + wx + z$$

mentre

$$R'(x) = sx^{s-1} + \alpha(s-1)x^{s-2} + \beta x^{s-3} + \cdots + \mu$$

$$\theta'(x) = t(p+1)x^p + upx^{p-1} + v(p-1)x^{p-2} + \cdots + w$$

L'equazione differenziale diventa pertanto l'equazione algebrica:

$$\{[t(p+1)-1]x^p + [up-a]x^{p-1} + [v(p-1)-b]x^{p-2} + \cdots + w - k\} \cdot (x^s + \alpha x^{s-1} + \beta x^{s-2} + \cdots + \mu x + \sigma) =$$

$$= (tx^{p+1} + ux^p + vx^{p-1} + \cdots + wx + z) \cdot (sx^{s-1} + \alpha(s-1)x^{s-2} + \beta x^{s-3} + \cdots + \mu)$$

Eseguendo i prodotti si ottiene in ciascuno dei due membri un polinomio di grado $p+s$. L'equazione è identicamente soddisfatta se i coefficienti delle potenze omonime a destra e a sinistra del segno di uguaglianza sono tutti uguali tra loro. Otterremo in pratica un sistema lineare di $p+s+1$ equazioni nelle $p+2$ incognite $t, u, \dots, w, z$.

Un tale sistema non ammette in genere una soluzione unica a meno che non vi siano s equazioni linearmente dipendenti dalle altre $p+1$.

Il sistema ha il seguente aspetto

$$\begin{cases} [t(p+1)-1] = ts \\ [t(p+1)-1]\alpha + [up-a] = t\alpha(s-1) + us \\ \dots \\ \dots \\ (w-k)\sigma = z\mu \end{cases}$$

Se $p = 0$ allora

$$\int \frac{dx}{\sqrt[r]{R(x)}} = \frac{tx+u}{\sqrt[r]{R(x)}}$$

Nel particolare, ma importantissimo, caso ulteriore $r = 2$ allora

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{tx+u}{\sqrt{R(x)}}$$

$$R(x) = x^s + \alpha x^{s-1} + \beta x^{s-2} + \cdots + \mu x + \sigma$$

$$R'(x) = sx^{s-1} + \alpha(s-1)x^{s-2} + \beta x^{s-3} + \cdots + \mu$$

$$\theta'(x) = t$$

L'equazione da risolvere è

$$[t-1]R(x) = (tx+u)R'(x)$$

ossia

$$[t-1](x^s + \alpha x^{s-1} + \beta x^{s-2} + \cdots + \mu x + \sigma) = (tx+u)(sx^{s-1} + \alpha(s-1)x^{s-2} + \beta x^{s-3} + \cdots + \mu)$$

Effettuando per esteso il prodotto dovrà essere

$$\begin{cases} t-1 = ts \\ [t-1]\alpha = t\alpha(s-1) + us \\ \cdots \\ \cdots \\ w\sigma = z\mu \end{cases}$$

Nei casi classici $2 < s \leq 6$ ed abbiamo da risolvere un sistema tra 4 e 7 equazioni in 2 incognite.

L'integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ sarà dunque pseudo-ellittico nel caso l'ultimo sistema ammetta una e una sola soluzione.

Il sistema è determinato solo nel caso $s = 1$ allora abbiamo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+\alpha}} = \frac{2x+2\alpha}{\sqrt{x+\alpha}} = 2\sqrt{x+\alpha}$$

Nell'ipotesi $s = 2$ il sistema non può essere mai soddisfatto e l'integrale non è mai algebrico, ma trascendente elementare.

Ad esempio cerchiamo di capire come si comporta

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

abbiamo $r = 2, p = 0$. Cerchiamo una funzione integrale del tipo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{ax+b}{\sqrt{1+x^4}}$$

Effettuando i calcoli troviamo che deve valere l'equazione

$$-ax^8 - 2bx^7 - 2bx^3 + a = 1$$

dobbiamo avere $b = 0$ e pure $a = 1$, ma anche $a = 0$, il che è ovviamente contraddittorio, per cui otteniamo un risultato importantissimo: l'integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

non rappresenta una funzione algebrica, bensì trascendente, nella fattispecie ellittica.

Studiamo ora l'integrale

$$\int \frac{x^7 + x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx$$

Con le notazioni già introdotte, $r = 2, p = 7, s = 4$. Cerchiamo quindi una funzione $\theta(x)$ di ottavo grado. I calcoli possono essere tediosi, ma alla fine troviamo che il sistema di equazioni ammette una soluzione e che

$$\int \frac{x^7 + x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx = \frac{(1+x^4)^2}{6\sqrt{1+x^4}} = \frac{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}}{6}$$