Quando manca poco

La serie armonica, notoriamente divergente, ammette una buona approssimazione per le sue ridotte, date dall'espressione

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \approx \log N + \gamma \qquad (1)$$

ove $\gamma \approx 0{,}5772156649\ldots$ è la costante di Euler-Mascheroni. La suddetta approssimazione consente di stimare, quando i numeri in gioco sono *abbastanza* grandi, tutta una serie di somme parziali. Ad esempio se vogliamo stimare il valore della somma armonica tra due estremi noti A, B allora

$$\sum_{k=A}^{B} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{B} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{A} \frac{1}{k} \approx \log B + \gamma - \log A - \gamma = \log \frac{B}{A}$$

A solo titolo esemplificativo dell'efficacia della (1) verifichiamo la bontà dell'approssimazione

$$1{,}526831430269604\ldots = \sum_{k=1234}^{5678} \frac{1}{k} \approx \log \frac{5678}{1234} = 1{,}526338132567584\ldots$$

con una differenza inferiore a 5 parti su 10.000.

Con la (1) ci si può anche giocare e calcolare che, al limite $N \to \infty$,

$$\sum_{k=N}^{pN} \frac{1}{k} = \log p$$

In particolare: la somma di un certo numero di reciproci dei naturali, a partire dal numero stesso, tende a $\log 2$.

Saliamo alla seconda potenza, si verifica numericamente che

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}\approx\zeta(2)-\frac{1}{N}\qquad(2)$$

La motivazione sta nel fatto che, sempre per numeri piuttosto grandi, se nella somma dei reciproci dei quadrati dei naturali ci si ferma ad un certo valore K, i restanti si comportano molto da vicino come $\frac{1}{x^2}$ e la somma si può assimilare all'integrale dell'addendo, che vale appunto $\left[-\frac{1}{x}\right]_K^{\infty}=\frac{1}{K}$.

Allora è possibile utilizzare il metodo già visto e scrivere che, nei limiti ormai stabiliti,

$$\sum_{k=A}^{B}\frac{1}{k^2}\approx\zeta(2)-\frac{1}{B}-\zeta(2)+\frac{1}{A}=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{B-A}{AB}$$

Se $B=pA$, allora la somma di tanti termini quanti sono compresi tra un dato numero A ed un suo multiplo secondo p vale

$$\sum_{k=A}^{pA}\frac{1}{k^2}\approx\frac{p-1}{pA}$$

In particolare: la somma di un certo numero K di quadrati dei reciproci dei naturali, a partire dal numero stesso, tende a $\frac{1}{2K}$.

A questo punto siamo pronti a volare. Sia da stimare la somma parziale dei reciproci della potenza *s*-sima dei naturali:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^s}$$

È di certo, con buona approssimazione,

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^s}\approx\zeta(s)-\int_N^\infty x^{-s}dx=\zeta(s)-\left[\frac{x^{-s+1}}{1-s}\right]_N^\infty=\zeta(s)-\frac{1}{(s-1)N^{s-1}}\qquad(3)$$

essendo $s\neq 1$.

Di conseguenza

$$\sum_{k=A}^{B}\frac{1}{k^s}\approx\frac{1}{(s-1)A^{s-1}}-\frac{1}{(s-1)B^{s-1}}$$

e se $B=pA$

$$\sum_{k=A}^{pA}\frac{1}{k^s}\approx\frac{1}{(s-1)A^{s-1}}-\frac{1}{(s-1)pA^{s-1}}=\frac{p-1}{(s-1)pA^{s-1}}$$

Non abbiamo fatto alcuna ipotesi sul fatto che s sia intero; è interessante vedere cosa succede per la radice quadrata:

$$\sum_{k=A}^{B}\frac{1}{\sqrt{k}}\approx 2\left(\sqrt{B}-\sqrt{A}\right)\qquad(4)$$

non occorre quindi neppure la limitazione che sia $s\geq 1$, ovvero che la serie estesa all'infinito converga, come d'altronde potevamo già sospettare avendo studiato la serie armonica.

Se $0>s=-t$ allora la (3) si legge

$$\sum_{k=1}^{N}k^t\approx\frac{N^{t+1}}{t+1}$$

e l'approssimazione è in genere accettabile, trattandosi di numeri piuttosto grandi, ma decresce all'aumentare di t.