Continuazioni integrali

Scriviamo

$$\Delta = \sqrt{1-k^2x^2}$$

avremo

$$\frac{d\Delta^m}{dx} = -k^2 m x \Delta^{\frac{m-2}{2}} \qquad (1)$$

dove poniamo che m può assumere qualsiasi valore intero.

Sia allora da calcolare

$$\int \frac{dx}{\Delta} \qquad (2)$$

Una semplice integrazione per parti fornisce, usando la (1) con $m = -1$

$$\int \frac{dx}{\Delta} = \frac{x}{\Delta} - k^2 \int \frac{x^2}{\Delta^3} dx \qquad (3)$$

e ritroviamo il noto risultato, portando il secondo integrale a primo membro e semplificando,

$$\int \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{x}{\Delta} \qquad (4)$$

Appare più interessante tornare alla (3) ed effettuare una ulteriore integrazione per parti:

$$\int \frac{dx}{\Delta} = \frac{x}{\Delta} - \frac{k^2x^2}{3\Delta^3} + \int \frac{k^2x^3 3k^2x}{3\Delta^5} = \frac{x}{\Delta} - \frac{k^2x^2}{3\Delta^3} + \int \frac{k^4x^4}{\Delta^5} \qquad (5)$$

Per proseguire integrando l'ultimo termine vediamo la regolarità che è sottesa. L'integrando ha al numeratore il fattore integrante $k^{2n}x^{2n}$ che, appunto integrato, fornisce $\frac{k^{2n}x^{2n+1}}{2n+1}$ che, portato sotto il segno di integrale, viene moltiplicato per il differenziale calcolato in (1) dando così il nuovo integrale

$$-\int \frac{k^{2n}x^{2n+1}}{2n+1} k^2(2n+1)x\Delta^{2n+1} = -\int \frac{k^{2n+2}x^{2n+2}}{\Delta^{2n+1}} \qquad (6)$$

che ha la stessa forma dell'integrale a destra in (5) con tutti gli esponenti aumentati di 2 unità; il segno negativo alterna i segni nella serie che otteniamo iterando l'integrazione per parti e che scriviamo qui:

$$\int \frac{dx}{\Delta} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{k^{2n-2}x^{2n-1}}{(2n-1)\Delta^{2n-1}} \qquad (7)$$

Si tratta naturalmente di una espressione soltanto formale. Dobbiamo in realtà dimostrare che il termine generico sia infinitesimo per assicurarci della convergenza della serie, dato il carattere alterno dei segni. Sappiamo che è $k, x \leq 1$ per cui

$$\frac{k^{2n-2}x^{2n-1}}{(2n-1)\Delta^{2n-1}} \leq \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\Delta^{2n-1}}$$

Inoltre

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\Delta^{2n-1}} = \frac{\Delta^{1-2n}}{(2n-1)}$$

L'ultima espressione ha il numeratore limitato e il denominatore che cresce indefinitamente, per cui il termine generale della serie (7) è effettivamente infinitesimo, e la serie converge in $-1 \leq k, x \leq 1$. La sua somma quindi rappresenta effettivamente l'integrale a primo membro.

Se d'altro canto vogliamo calcolare

$$\int \Delta dx \qquad (8)$$

di nuovo impiegando la medesima tecnica

$$\int \Delta dx = x\Delta + k^2 \int \frac{x^2}{\Delta} dx \qquad (9)$$

per cui l'analoga della (4) è

$$\int \frac{1 - 2k^2x^2}{\Delta} dx = x\Delta \qquad (10)$$

Se invece continuiamo ad integrare per parti la (9):

$$\int \Delta dx = x\Delta + k^2 \int \frac{x^2}{\Delta} dx = x\Delta + \frac{k^2x^3}{3\Delta} - \int \frac{k^4x^4}{3\Delta^3} dx$$

In generale

$$\int \frac{k^{2n}x^{2n}}{(2n-1)\Delta^{2n-1}} dx = \frac{k^{2n}x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)\Delta^{2n-1}} - \int \frac{k^{2n}x^{2n+1}k^2x(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)\Delta^{2n-3}} dx$$

Quindi

$$\int \Delta dx = x\Delta + \frac{k^2x^3}{3\Delta} - \frac{k^4x^5}{3\cdot 5\Delta^3} + \cdots - \frac{k^{2n}x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)\Delta^{2n-1}} \cdots$$

ossia

$$\int \Delta dx = x\Delta + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{k^{2n}x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)\Delta^{2n-1}} \qquad (11)$$

Ma torniamo alla (7). L'integrale può essere reso definito e calcolato tra gli estremi 0 e 1:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}} = G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{k^{2(n-1)}}{(2n-1)(1-k^2)^{n-\frac{1}{2}}} \qquad (12)$$

La serie converge solo per $k^2 \leq \frac{1}{2}$.

Qualche esempio. Sia $k^2 = \frac{1}{2}$, allora

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}} = G\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{2}}{(2n-1)} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

Sia $k^2 = \frac{1}{4}$, allora

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}} = G\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}}{(2n-1)\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{3}}{3^n(2n-1)}$$

L'ultima serie appare ardua da sommare, ma se ricordiamo che

$$G(k) = \frac{\arcsin k}{k} \qquad (13)$$

allora, immediatamente,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}} = G\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{3}}{3^n(2n-1)} = \frac{\pi}{3}$$

In generale, fatto $k^2 = \frac{1}{p}$ $(p \geq 2)$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{p}}} = G\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{p}}{(2n-1)(p-1)^{n-\frac{1}{2}}} \qquad (14)$$

Se, grazie alla (13) utilizziamo valori di k corrispondenti ad archi cosiddetti "notevoli", come $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{15}, \dots$ possiamo in forma chiusa ottenere somme di serie dai termini piuttosto complessi.