29. Integralia: da uno a due a uno

Quando Dante trovò la via che saliva al dilettoso monte sbarrata da tre fiere (*Inf.* I), si perse d'animo e stava quasi per rinunciare all'impresa quando Virgilio gli mostrò una strada alternativa, apparentemente più ardua ma che gli avrebbe fatto sperimentare ben altra gioia, incluso il raggiungimento dell'agognata meta.

Lo studio di alcuni integrali definiti in una sola variabile a volte può essere affrontato solo ricorrendo a strade che a prima vista sembrano farci allontanare dall'obiettivo ma che in effetti sono non solo efficaci ma anche efficienti e deliziose, offrendoci panorami più ampi e tutt'altro che angusti.

Consideriamo il seguente caso:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx \qquad [29.1]$$

Il tentativo di addomesticamento suggerisce il cambio di variabile $x^2=y$ per cui

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy \qquad [29.2]$$

dalla padella alla brace? Un attimo: quanto vale l'integrale degli errori?

$$\int_0^{\infty} e^{-yx^2} dx$$

poniamo $yx^2=z^2$ da cui $dx = dz / \sqrt{y}$ e

$$\int_0^{\infty} e^{-yx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{y}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ossia

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-yx^2} dx$$

che usiamo nella [29.2]:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sin y \int_0^{\infty} e^{-yx^2} dxdy$$

Nell'intero primo quadrante possiamo scambiare l'ordine di integrazione e scrivere che

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sin y e^{-yx^2} dxdy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sin y e^{-yx^2} dydx \qquad [29.3]$$

ci sentiamo sempre peggio, se non fosse che l'integrale interno si può trattare per parti due volte:

$$J = \int_0^{\infty} \sin y e^{-yx^2} dy = -\cos y e^{-yx^2} - x^2 \int_0^{\infty} \cos y e^{-yx^2} dy = -\cos y e^{-yx^2} \Big| - x^2 \sin y e^{-yx^2} \Big| - x^4 \int_0^{\infty} \sin y e^{-yx^2} dy$$

ossia

$$(1+x^4) \int_0^{\infty} \sin y e^{-yx^2} dy = -(\cos y + x^2 \sin y) e^{-yx^2} \Big|_0^{\infty} = 1$$

e

$$J = \int_0^{\infty} \sin y e^{-yx^2} dy = \frac{1}{1+x^4}$$

Il nuovo aspetto che la [29.3] assume è

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sin y e^{-yx^2} dydx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

La tranquillità è raggiunta, abbiamo da integrare una funzione razionale fratta, cosa che Sherlock Holmes definirebbe "elementare" e di cui sappiamo il risultato essere $\pi / 2\sqrt{2}$ quindi

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

La stessa strada può essere utilizzata per calcolare

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx$$

e verificare che $I_2 = I_1$.

Il passaggio agli integrali doppi va sempre effettuato con cautela: laddove il dominio di integrazione non è un rettangolo lo scambio dell'ordine di integrazione impone di considerare bene i limiti di integrazione.

Nella sezione [28] abbiamo già usato il lemma di Frullani per calcolare

$$\int_0^{\infty} \frac{arctg(ax) - arctg(bx)}{x} dx = \left[0 - \frac{\pi}{2}\right] \ln \frac{b}{a} = -\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a} \qquad (b<a)$$

Il metodo degli integrali doppi ci suggerisce facilmente quale è la funzione di due varia bili da utilizzare: poiché abbiamo la differenza tra *arctg* dobbiamo avere una funzione razionale fratta del tipo $1/(1+t^2)$:

$$\int_a^b \int_0^{\infty} \frac{dxdy}{1+x^2y^2} = \int_a^b \frac{arctg(xy)}{y}\Bigg|_0^{\infty} dy = \int_a^b \frac{\pi}{2y} dy = \frac{\pi}{2} \ln y\Big|_a^b = \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a} \qquad (b>a)$$

L'inversione dell'ordine di integrazione d'altro canto dice che

$$\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a} = \int_a^b \int_0^{\infty} \frac{dxdy}{1+x^2y^2} = \int_0^{\infty} \int_a^b \frac{dydx}{1+x^2y^2} = \int_0^{\infty} \frac{arctg(xy)}{x}\Bigg|_a^b dx = \int_a^b \frac{arctg(bx) - arctg(ax)}{x} dy \qquad (b>a)$$

che mostra lo stesso risultato.

L'integrale

$$\int_0^{\infty} \int_a^b e^{-xy} dydx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xy}}{x}\Bigg|_a^b = \int_0^{\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx = \log \frac{b}{a} \qquad [29.4]$$

fornisce un ulteriore esempio della potenza del metodo (si veda ancora la sez. 28).

Gli ingredienti e le armi possono essere usate in combinazione tra loro, o in batteria, come si dice nel gioco degli scacchi. Sia

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-ax}\right)\left(1-e^{-bx}\right)}{x^2}dx$$

Per la [29.4] ricorriamo a due distinti integrali, per cui saliamo addirittura due gradini:

$$I_3 = \int_0^\infty \left(\int_0^a e^{-xy}dy \int_0^b e^{-xz}dz \right) dx = \int_0^a \int_0^b \left(\int_0^\infty e^{-(y+z)x} dxdzdy \right) = \int_0^a \int_0^b \frac{dzdy}{y+z} = \int_0^a [\log(y+b) - \log y]dy =$$

$$= (y+b)\log(y+b) - y\log y\Big|_0^a = (a+b)\log(a+b) - a\log a - b\log b$$

eccolo là, il famigerato integrale triplo!

La tecnica di scrivere una funzione come integrale definito di una funzione "più semplice" è veramente potente: si riescono ad esempio ad addomesticare casi altrimenti ardui. Alcuni esempi:

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(xy)dy$$

$$\frac{1-\cos x}{x} = \int_0^1 \sin(xy)dy$$

Una ulteriore semplice osservazione permette di eliminare un fattore molto scomodo, quale il denominatore di una funzione contenente un esponenziale, dagli integrali definiti. Un minimo di algebra permette di scrivere che

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+1/x} = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{x+1} = 1$$

La presenza di un numero e del suo inverso fa pensare subito agli esponenziali:

$$\frac{1}{1+e^y} + \frac{1}{1+e^{-y}} = 1 \qquad [29.5]$$

Ora cosa succede se abbiamo a che fare con una qualsiasi funzione pari? Ecco qua: dobbiamo calcolare

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^{kx}}\,dx \qquad [29.6]$$

cambiando x in $-x$ e tenendo conto della parità di f:

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^{kx}}\,dx = -\int_{a}^{-a} \frac{f(-x)}{1+e^{-kx}}\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^{-kx}}\,dx$$

inoltre

$$\int_{-a}^{a} \left[\frac{f(x)}{1+e^{kx}} + \frac{f(x)}{1+e^{-kx}}\right] dx = \int_{-a}^{a} f(x)\left(\frac{1}{1+e^{kx}} + \frac{1}{1+e^{-kx}}\right) dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

per cui

$$2\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^{kx}}\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

e infine il fondamentale risultato

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^{kx}}\,dx = \int_{0}^{a} f(x)dx \qquad f(x)=f(-x) \qquad [29.7]$$

che permette di eliminare il complicato denominatore.

Un esempio di funzione pari? Una qualsiasi costante, ad esempio 1:

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+e^{kx}}\,dx = \int_{0}^{a} dx = a$$

oppure

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^{2n}}{1+e^{kx}}\,dx = \int_{0}^{a} x^{2n}\,dx = \left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_{0}^{a} = \frac{a^{2n+1}}{2n+1}$$

o

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{\left(1+e^{kx}\right)\left(1+x^2\right)} dx = \int_{0}^{a} \frac{1}{\left(1+x^2\right)} dx = \arctan a$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{e^{-m|x|}}{1+e^{kx}} dx = \int_{0}^{a} e^{-m|x|} dx = -\left.\frac{e^{-m|x|}}{m}\right|_{0}^{a} = \frac{1}{m}\left(1-e^{-ma}\right) \qquad a>0$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{|x|}{1+e^{kx}} dx = \int_{0}^{a} x dx = \frac{a^2}{2} \qquad a>0$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{\log(1+|x|)}{1+e^{kx}} dx = \int_{0}^{a} \log(1+x) dx = (a+1)\log(a+1)-(a+1) \qquad a>0$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{(1+|x|)\left(1+e^{kx}\right)} dx = \int_{0}^{a} \frac{dx}{1+x} = \log\left(1+a\right) \qquad a>0$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+|x|^3)\left(1+e^{kx}\right)} dx = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{\log 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+e^{kx}} dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$