13. Dentro e fuori le mura

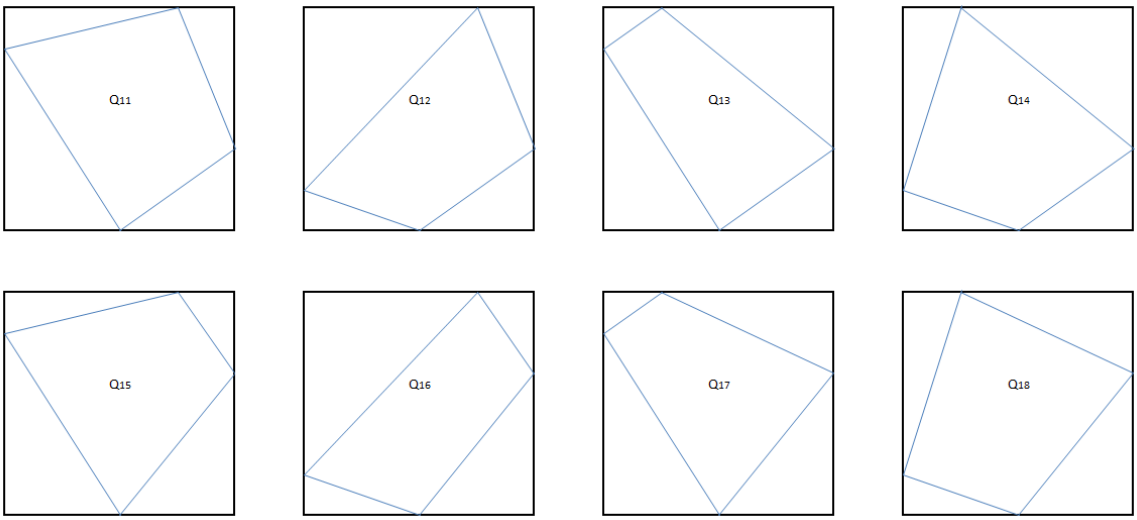
Consideriamo un quadrato di lato unitario. Chiamiamo i suoi lati l_1, l_2, l_3, l_4, su ciascun lato l_k individuiamo un punto P_k che intercetti le due distanze

$$a_k^{'} = \frac{1}{k+1} \qquad [13.1a]$$

$$a_k^{''} = \frac{k}{k+1} \qquad [13.1b]$$

tali che $a_k^{'} + a_k^{''} = 1$

Possiamo unire tra loro i quattro punti P_k in otto modi Q_{ij} diversi tra loro ottenendo altrettanti quadrilateri:



Calcoliamone le aree, ciascuna di esse assume il valore A_{ij} che otteniamo facilmente

$$A_{11} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{53}{120} = \frac{67}{120}$$

$$A_{12}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=1-\frac{62}{120}=\frac{58}{120}$$

$$A_{13}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=1-\frac{67}{120}=\frac{53}{120}$$

$$A_{14}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=1-\frac{58}{120}=\frac{62}{120}$$

$$A_{15}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=1-\frac{58}{120}=\frac{62}{120}$$

$$A_{16}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=1-\frac{67}{120}=\frac{53}{120}$$

$$A_{17}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=1-\frac{62}{120}=\frac{58}{120}$$

$$A_{18}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=1-\frac{53}{120}=\frac{67}{120}$$

I quadrilareri sono equiestesi a coppie, i quattro valori, ordinato secondo frazioni crescenti di 120mi sono 53, 58, 62, 67 ovvero, rispetto alla metà dell'area del quadrato originale, abbiamo quadrilateri di area

$$\frac{60\pm 2}{120} \qquad \frac{60\pm 7}{120}$$

Se sul lato l_2 stacchiamo un segmento di 1/4 e poi sul successivo di 1/5 e poi 1/6 abbiamo che i quadrilateri restanti hanno area

$$\frac{40\pm 1}{80} \qquad \frac{40\pm 7}{80}$$

Se sul lato l_2 stacchiamo un segmento di 1/5 e poi sul successivo di 1/6 e poi 1/7 abbiamo che i quadrilateri restanti hanno area

$$\frac{105 \pm 2}{210} \qquad \frac{105 \pm 23}{210}$$

Se sul lato l_2 partiamo da 1/6 e proseguiamo alla stessa stregua, le aree restanti sono

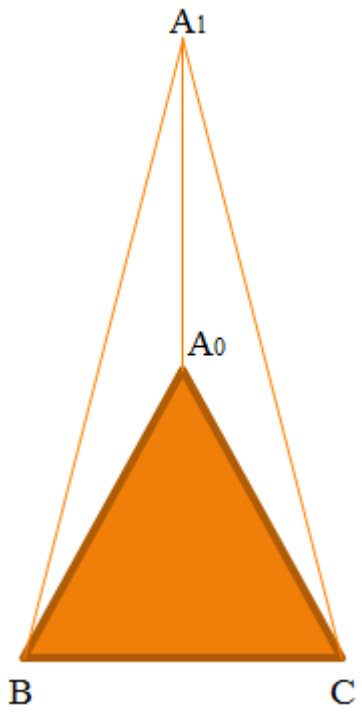
$$\frac{336 \pm 5}{672} \qquad \frac{336 \pm 85}{672}$$

e, a seguire,

$$\frac{168 \pm 2}{336} \qquad \frac{168 \pm 47}{336}$$

Se invece che costruire dentro proviamo a farlo fuori, accediamo a nuove cose. Consideriamo un triangolo equilatero ancora di area unitaria.

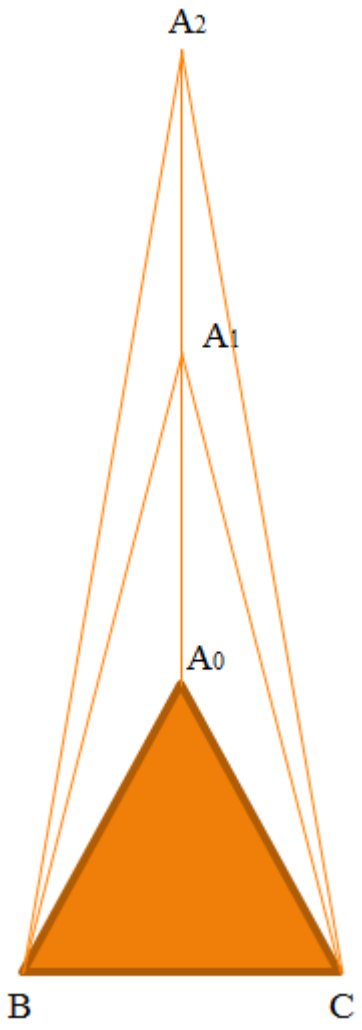
A partire da uno dei vertici spostiamoci in direzione ortogonale al lato che non lo contiene di una distanza tale che il nuovo triangolo abbia area doppia:



avremo allora che il lato l_0 del triangolo equilatero è pari a $\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt[4]{3}}$, mentre la sua quota (altezza) h_0 è $\sqrt[4]{3}\sqrt{k}$.

Il triangolo A_1BC ha area $2k$ per cui la quota h_1 di A_1 vale naturalmente $2h_0$. Il lato A_1B è $\frac{\sqrt{7}\sqrt{k}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{7}}{2} l_0$.

Proseguiamo in maniera analoga, ossia prolunghiamo il segmento A_0A_1 dalla parte di A_1 fino ad A_2 in maniera che il triangolo A_2BC abbia area $3k$.



La quota h_2 di A_2 vale naturalmente $3h_0$. Il lato A_2B è $\frac{\sqrt{10}\sqrt{k}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{10}}{2} l_0$.

Possiamo continuare ancora, al passo k-simo avremo che la quota h_k vale kh_0 mentre il lato $A_{k+1}B$ è

$$\frac{\sqrt{3k+4}\sqrt{k}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{3k+4}}{2} l_0$$

la differenza di quota $A_kA_{k\text{-}1}$ è costante e pari a h_0, è possibile quindi calcolare l'area del triangolo $A_kA_{k\text{-}1}B$; premesso che il perimetro vale

$$2p = \sqrt[4]{3}\sqrt{k} + \left(\sqrt{3k+4} + \sqrt{3k+1}\right)\frac{\sqrt{k}}{\sqrt[4]{3}}$$

Abbiamo che l'area cercata è la metà della differenza tra l'area all'ultimo passo e l'area al passo precedente, ma questa a rea è proprio k, per cui Area($A_kA_{k\text{-}1}B$) = k /2.

Per finire questo excursus geometrico sbirciamo a casa dei triangoli pitagorici, ovvero quei triangoli rettangoli le lunghezze dei cui lati sono espresse da numeri interi.

Vi sono alcune proprietà, che poi diventano condizioni necessarie, non sempre sufficienti, che deve avere l'ipotenusa di un triangolo rettangolo primitivo, ad esempio che

1. L'ipotenusa di un triangolo primitivo è congruente a 1 oppure a 5 (mod 12).
2. Tutti gli interi che sono somma di due quadrati non hanno alcun fattore della forma $4k+3$.

Vi sono raccolte abbastanza estese di terne pitagoriche, e se ne possono costruire aventi proprietà determinate (cateti che differiscono di una unità, ipotenusa che differisce di una unità rispetto al cateto maggiore e così via).

Qui riporto alcune terne le cui ipotenuse [c] hanno caratteristiche particolari.

- Single digit

cateto 1	cateto 2	ipotenusa
36	105	111
220	1089	1111
2439	10840	11111
7161	110880	111111
36036	105105	111111
42735	102564	111111
73689	83160	111111
162520	1099161	1111111
222200	11108889	11111111
484561	11100540	11111111
1723161	10976680	11111111
1981980	10932911	11111111
2200220	10891089	11111111
2417580	10844911	11111111
3862639	10418100	11111111
5309436	9760465	11111111
5503564	9652335	11111111
6758895	8818964	11111111
6933905	8682036	11111111
7137064	8515815	11111111
7305936	8371385	11111111
36036036	105105105	111111111

- Multi-digit crescenti

cateto 1	cateto 2	ipotenusa
27	120	123
210	1216	1234
7407	9876	12345
194183	1219200	1234567
3574350	11816928	12345678
25853940	120719312	123456788
33996788	118683600	123456788
47483380	113960112	123456788
56469140	109785312	123456788
58097312	108932460	123456788
60333812	107709840	123456788
4404	12845	13579
54	240	246
420	2432	2468

- Sandwich

cateto 1	cateto 2	ipotenusa
215985	1090936	1112111
220220	1090089	1112111
427735	1026564	1112111
622545	921536	1112111
578025	951264	1113111
651620	904911	1115111
245439	1090840	1118111

111121111 ha 16 diverse configurazioni risolutive tra le quali segnalo

$$111121111^2 = 24392439^2 + 108410840^2$$

111131111 ha 4 diverse configurazioni risolutive tra cui

$$111131111^2 = 102582564^2 + 108410840^2$$

Mentre

$$111161111^2 = 56840080^2 + 95530089^2$$

$$111171111^2 = 54220764^2 + 97052175^2$$

$$555515555^2 = 45496157^2 + 553649376^2$$

$$11335577^2 = 1611148^2 + 11220495^2$$

$$77553311^2 = 8748300^2 + 77058311^2$$

Segnalo ancora

$$27099729^2 + 120443240^2 = 123454321^2 = 52877520^2 + 111556879^2$$