6. Una grande famiglia

Riprendiamo lo studio di una tipologia di integrali in parte già visti.

Consideriamo l'integrale

$$I_{m,n}^{1} = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1-x^m y^n} = \int\int \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^m y^n\right)^k dxdy \qquad [6.1]$$

Non sempre siamo in grado di esprimere la primitiva in forma chiusa, ma, ricorrendo allo sviluppo in serie, abbiamo

$$I_{m,n}^{1} = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1-x^m y^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(km+1)(kn+1)} \qquad [6.2]$$

L'integrale è simmetrico quindi invariante per uno scambio tra m e n:

$$I_{m,n}^{1} = I_{n,m}^{1}$$

Il suo valore è una funzione di m ed n che, rispetto ad esse, è

- limitata
- monotona decrescente
- tendente a 1 quando le due variabili crescono indefinitamente

riporto alcuni valori notevoli:

$$I_{1,1}^{1} = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$I_{1,2}^{1} = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(2k+1)} = 2\ln 2$$

$$I_{1,3}^{1} = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(3k+1)} = \frac{9\ln 3+\sqrt{3}\pi}{12}$$

$$I_{1,4}^{1} = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(4k+1)} = \frac{6\ln 2+\pi}{6}$$

$$I_{2,2}^{1}=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1-x^2y^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$I_{2,3}^{1}=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1-x^2y^3}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(3k+1)}=\frac{\pi/\sqrt{3}+3\ln 3-4\ln 2}{12}$$

A parità di valore della somma $m+n$, l'integrale assume valore minimo quando $m=n$, data la simmetria rispetto agli esponenti, confrontiamo i denominatori termine a termine

$$(kn+1)^2>(km+1)(2kn-km+1)$$

perché notoriamente, a parità di perimetro, il rettangolo di area massima è il quadrato, di conseguenza i reciproci sono i più piccoli, dal che l'assunto.

Consideriamo ora l'integrale

$$I_{m,n}^{2}=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1+x^my^n}=\int\int\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(x^my^n\right)^k dxdy \qquad [6.3]$$

Come nel caso precedente abbiamo

$$I_{m,n}^{2}=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1+x^my^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(km+1)(kn+1)} \qquad [6.4]$$

L'integrale è simmetrico quindi invariante per uno scambio tra m e n:

$$I_{m,n}^{1}=I_{n,m}^{1}$$

Notiamo che

$$I_{0,0}^{2}=1/2 \qquad [6.5]$$

Valgono proprietà analoghe a quelle viste; l'integrale è una funzione di m ed n che, rispetto ad esse, è

- limitata
- monotona crescente
- tendente a 1 quando le due variabili crescono indefinitamente

per dimostrare la seconda proprietà si può derivare rispetto ai parametri *m*, *n* ottenendo una funzione positiva; riporto alcuni valori notevoli:

$$I_{1,1}^2 = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1+xy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$I_{1,2}^2 = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1+xy^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)(2k+1)} = \frac{\pi - 2\ln 2}{2}$$

$$I_{1,3}^2 = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1+xy^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)(3k+1)} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

$$I_{1,4}^2 = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1+xy^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)(4k+1)} = \frac{\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2}) - 2\ln 2 + \sqrt{2}\pi}{6}$$

$$I_{2,2}^2 = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1+x^2y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = G$$

$$I_{2,3}^2 = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1+x^2y^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(3k+1)} = \ln 2 + \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\pi$$

Ancora in due variabili possiamo considerare l'integrale in quattro parametri

$$I_{t,u,m,n}^1 = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^t y^u dxdy}{1-x^m y^n} = \int\int x^t y^u \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^m y^n\right)^k dxdy \qquad [6.6]$$

$$I_{t,u,m,n}^1 = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^t y^u dxdy}{1-x^m y^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(km+t+1)(kn+u+1)} \qquad [6.7]$$

Naturalmente il numero di combinazioni è grandissimo, per valori bassi dei parametri abbiamo, ad esempio,

$$I^1_{1,0,2,2} = \int_0^1\int_0^1 \frac{xdxdy}{1-x^2y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+3)(2k+1)} = \ln 2$$

$$I^1_{1,1,1,1} = \int_0^1\int_0^1 \frac{xydxdy}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

$$I^1_{1,1,2,2} = \int_0^1\int_0^1 \frac{xydxdy}{1-x^2y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

$$I^1_{2,2,1,1} = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2y^2dxdy}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$$

$$I^1_{p,p,1,1} = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^py^pdxdy}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j^2}$$

$$I^1_{1,1,1,2} = \int_0^1\int_0^1 \frac{xydxdy}{1-xy^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(2k+2)} = \frac{1}{2}$$

$$I^1_{1,2,1,2} = \int_0^1\int_0^1 \frac{xy^2dxdy}{1-xy^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(2k+3)} = 2\ln 2 - 1$$

$$I^1_{1,2,1,3} = \int_0^1\int_0^1 \frac{xy^2dxdy}{1-xy^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(3k+3)} = \frac{1}{3}$$

Simmetricamente, sempre in due variabili possiamo considerare l'integrale in quattro parametri

$$I^2_{t,u,m,n} = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^ty^udxdy}{1+x^my^n} = \iint x^ty^u \sum_{k=0}^{\infty} \left(-x^my^n\right)^k dxdy \qquad [6.8]$$

$$I^2_{t,u,m,n} = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^ty^udxdy}{1+x^my^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(km+t+1)(kn+u+1)} \qquad [6.9]$$

Se, con un ultimo sforzo, passiamo a tre variabili la questione si complica ancor più, ma l'approccio rimane lo stesso. Vediamo solo qualche caso.

$$Y^1_{a,b,c} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydz}{1-x^a y^b z^c} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(ka+1)(kb+1)(kc+1)}$$

$$Y^1_{1,1,2} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydz}{1-xyz^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2(2k+1)} = 4\ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$Y^1_{1,1,3} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydz}{1-xyz^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2(3k+1)} = \frac{9}{8}\ln 3 - \frac{\pi^2}{12} + \frac{\sqrt{3}\pi}{8}$$

Da notare che

$$I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{xdxdydz}{1-xyz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

implica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

$$I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{xydxdydz}{1-xyz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{xyzdxdydz}{1-xyz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3} = \zeta(3) - 1$$

$$I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{xdxdydzdw}{1-xyzw} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k^3} = \zeta(3) - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$$

per cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k^3} + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3} + 2$$

analoga alla precedente

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)k^2}-\frac{\pi^2}{6}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}+1$$

Passando a cinque variabili nell'iperquadrato $[0,1]^5$ ed un numeratore avente una sola variabile di primo grado abbiamo

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)k^4}=\frac{\pi^4}{180}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$$

Il confronto tra integrali di espressioni tipo

$$\frac{x^m}{1-xyzwt}$$

porta a calcolare funzioni

$$\int_0^1 x^{m-1}li_4(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+m)k^3}$$

dove il polilogaritmo è definito come

$$li_4(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^4}$$

Ancor più in generale, se l'integrando è in s variabili che chiamiamo x_j

$$\frac{x^m}{1-\prod_{j=1}^{s}x_j}$$

allora l'integrale sull'iperquadrato $[0,1]^s$ è

$$\int_0^1 x^{m-1}li_{s-1}(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+m)k^{s-1}}$$

che è un polinomio di primo grado non omogeneo nelle funzioni $\zeta(p)$ con p tra 2 e s-1.

Se l'integrando è

$$\frac{x^m y^n}{1-\prod_{j=1}^{s} x_j}$$

allora l'integrale sull'iperquadrato $[0,1]^s$ è

$$\int_{[0,1]^2} x^{m-1} y^{n-1} li_{s-1}(xy)dxdy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+m)(k+n)k^{s-2}} \qquad [6.10]$$

che è un polinomio dello stesso tipo in $\zeta(p)$, il che consente di scrivere relazioni di comparazione tra serie del tipo [6.10]. La generalizzazione ad un monomio di più variabili a numeratore è immediata.

Pochi soli esempi:

$$\frac{x^6}{1-\prod_{j=1}^{4} x_j}$$

dà

$$\int_0^1 x^5 li_3(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+6)k^3} = \frac{\zeta(3)}{6} - \frac{\pi^2}{216} + \frac{49}{4320}$$

mentre

$$\frac{x^2 y^3}{1-\prod_{j=1}^{4} x_j}$$

dà

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+4)k^2} = \frac{\zeta(3)}{12} - \frac{7\pi^2}{864} + \frac{733}{20736}$$

Usando tre variabili abbiamo

$$\frac{xy^2}{1-xyz}$$

che dà

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}$$

che permette di calcolare tutte le somme razionali

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+t)(k+t+1)(k+t+2)}=\frac{1}{4}-\sum_{m=1}^{t}\frac{1}{m(m+1)(m+2)}$$

Con quattro variabili abbiamo

$$\frac{xy^2z^3}{1-xyzw}$$

che dà

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{18}$$

Procedendo allo stesso modo, ossia incrementando di una variabile e aggiungendo al numeratore un fattore con la potenza ulteriore, abbiamo che la serie ha come somma l'inverso dei numeri

[1, 4, 18, 96, 600, 4320, …, n·n!, …] *A001563*

Se consideriamo una forma diversa di denominatore e modifichiamo conseguentemente i limiti di integrazione otteniamo la somma di nuove serie.

Sia da calcolare

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dxdy}{1-(x+y)} = \iint \sum_{k=0}^{\infty} (x+y)^k \, dxdy$$

abbiamo

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{k(k+1)2^k} \qquad [6.11]$$

ma le serie costituite dai due addendi sono entrambe convergenti, per cui

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$$

e quindi, come già noto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = 1 - \ln 2$$

In generale

$$\int_0^{\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{1}{q}} \frac{dxdy}{1-(x+y)} = \iint \sum_{k=0}^{\infty} (x+y)^k \, dxdy \qquad \text{dove} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

fornisce

$$\ln p - \frac{p-1}{p}\ln(p-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k-1}}{pk(k+1)} - \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k-1}}{k(k+1)} + \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{p^{k+1}k(k+1)} - \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k-1}}{p^2 k(k+1)} \right]$$

[6.12]

Sia ora da calcolare

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dxdy}{1-(x+y)^2} = \iint \sum_{k=0}^{\infty} (x+y)^{2k} \, dxdy$$

abbiamo

$$\frac{6\ln 2-3\ln 3}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}-1}{k(2k-1)2^{2k}}$$

Introducendo una ulteriore variabile

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\int_0^{\frac{1}{3}}\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1}{1-(x+y+z)}=\int\int\sum_{k=0}^{\infty}(x+y+z)^k\,dxdy$$

abbiamo

$$\frac{3\ln 3-4\ln 2}{6}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-(k+1)2^{k+2}+k3^{k+1}}{k^2(k+1)(k+2)3^{k+1}}$$

Infine

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dxdy}{1+(x+y)}=\int\int\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x+y)^k\,dxdy$$

abbiamo

$$5\ln 2-3\ln 3=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^k-1}{k(k+1)2^k} \qquad [6.13]$$

Sommando membro a membro [6.11] e [6.13] che hanno gli stessi elementi rispettivamente sommati a segno positivo e segno alterno restano solo i termini di indice dispari, per cui

$$3(\ln 4-\ln 3)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k+1}-1}{(2k+1)(k+1)2^{2k+1}}$$

Se invece sottraiamo membro a membro [6.11] e [6.13] restano solo i termini di indice pari, per cui

$$3\ln 3-4\ln 2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}-1}{k(2k+1)2^{2k}}$$