1. Che forza!

Credo che se chiedessi di dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\left(\sqrt{\frac{k+1}{n}}-\sqrt{\frac{k}{n}}\right)^2}=\frac{1}{8}\ln\frac{\Phi+\frac{1}{2}}{\Phi-\frac{1}{2}}+\Phi-\frac{1}{2} \qquad [1.1]$$

potrei dare l'impressione di essere un vero mago del calcolo, per poter essere arrivato a stabilire un'espressione del genere (in cui, tra l'altro, compare il numero aureo Φ).

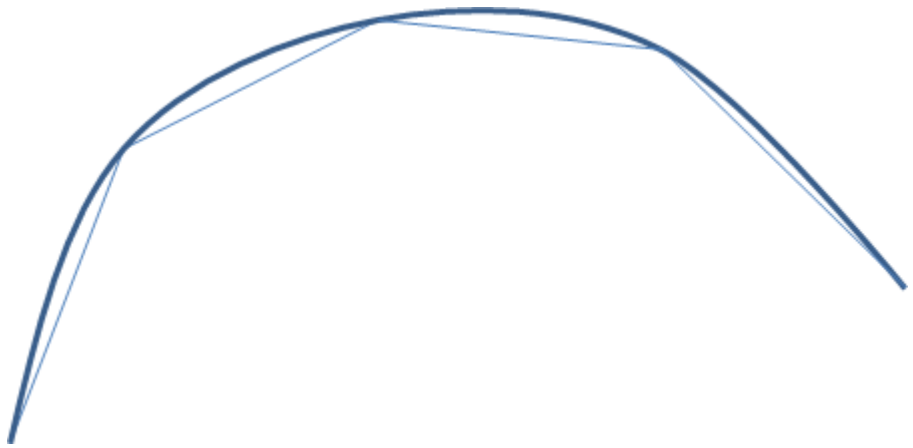
Naturalmente le cose non stanno affatto così. Questa volta invece di adottare un approccio cosiddetto top-down faccio all'incontrario.

Guardiamo bene la tremenda espressione sotto segno di limite: c'è la radice quadrata della somma di due quadrati, il che fa pensare ad una distanza; ci sono due termini che assomigliano a degli infinitesimi allorquando si passa, come richiesto, al limite; il secondo termine a sua volta sembra tanto un differenziale: allora? È presto fatto: credo che ci siamo intesi.

Alla luce delle semplici osservazioni appena fatte, supponiamo di voler calcolare la lunghezza dell'arco di una certa curva, compreso tra due punti dati. Allora dobbiamo valutare

$$\int_a^b \sqrt{1+(df/dx)^2}\,dx \qquad [1.2]$$

sappiamo sin dai tempi di Archimede che, se la curva non è patologica, tale lunghezza è approssimata dalla lunghezza della spezzata ottenuta dividendo la curva con numero sempre maggiore di punti interni, come da figura



Ma la lunghezza della spezzata è di calcolo immediato; avendo introdotto un sistema di riferimento cartesiano nel quale descriviamo la curva attraverso la funzione $y(x)$ che compare sotto il segno di integrale nella [1.2] dobbiamo semplicemente valutare la sommatoria pitagorica seguente, estesa al numero n di intervalli intercettati dai punti di suddivisione della curva, l'approccio più naturale è che l'intervallo $[a,b]$ sia suddiviso in n parti uguali:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left[\frac{(b-a)}{n}\right]^2+\left[f(k+1)-f(k)\right]^2} \qquad [1.3]$$

Passando al limite di un numero infinito di suddivisioni, l'espressione [1.3] tende al valore [1.2].

Un primo esempio è quello della lunghezza della sinusoide nell'intervallo fondamentale $[0,\pi]$; la sua espressione integrale è

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \qquad [1.4]$$

Suddividiamo detto intervallo in n parti uguali e consideriamo il k-simo intervallo; il segmento di retta intercettato sulla sinusoide tra i punti di ascissa k/n e $(k+1)/n$ sarà lungo

$$\sqrt{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\sin\frac{(k+1)\pi}{n}-\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2}$$

sommiano tutti questi segmenti, e facciamo tendere a zero la loro lunghezza, ovvero portiamo il numero n di intervalli all'infinito e abbiamo che

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\sin\frac{(k+1)\pi}{n}-\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2} \qquad [1.5]$$

Possiamo applicare il metodo a curve di espressione f qualsiasi; di alcune di esse (poche in verità) siamo in grado anche di determinare l'espressione esatta della lunghezza, perché l'integrale è quadrabile.

La parabola di equazione $f(x)=x^2$ ha lunghezza, sull'intervallo $[0,1]$ pari a

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{\sinh^{-1}(2)+2\sqrt{5}}{4}$$

che è pari a

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\left[\left(\frac{k+1}{n}\right)^2-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]^2}$$

per cui, alla fine

$$\frac{\sinh^{-1}(2)+2\sqrt{5}}{4} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{(2k+1)^2}{n^4}} \qquad [1.6]$$

Un procedimento analogo, che qui evito di riportare, vale per la lunghezza di una curva di grado *m*-simo.

Per una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine abbiamo, per la lunghezza dell'arco compreso in un quadrante, il valore $\pi/2$. Scriviamone la rappresentazione come $f(x)=(1-x^2)^{1/2}$, allora

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\left[\sqrt{1-\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}-\sqrt{1-\frac{k}{n}^2}\right]^2} \qquad [1.7]$$

Per l'iperbole equilatera ortocentrica abbiamo che la lunghezza dell'arco compreso tra due interi positivi successivi è

$$\int_r^{r+1}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\left[\frac{n}{nr+k+1}-\frac{n}{nr+k}\right]^2} \qquad [1.8]$$

da cui

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ r\to\infty}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\left[\frac{n}{nr+k+1}-\frac{n}{nr+k}\right]^2} = 1$$

La serie a destra di ciascuna espressione può essere quindi calcolata in forma finita o esatta allorquando si riesca ad integrare in maniera chiusa la funzione a sinistra. Se abbiamo casi un po' più generali dobbiamo procedere come segue. Supponiamo di voler calcolare

$$\int \sqrt{1+f(x)}dx$$

allora dobbiamo trovare una opportuna primitiva:

$$\int \sqrt{1+f(x)}dx = \int \sqrt{1+\sqrt{f(x)}^2}\,dx = \int \sqrt{1+g'(x)^2}\,dx$$

ossia

$$g(x) = \int \sqrt{f(x)}dx$$

di modo che

$$\int_a^b \sqrt{1+f(x)}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left[\frac{(b-a)}{n}\right]^2 + [g(k+1)-g(k)]^2} \qquad [1.9]$$

Ad esempio, se $f(x)=x$ allora $g(x) = \int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$ e

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \frac{2\sqrt{2}-2}{3} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{9}\left[\left(\frac{k+1}{n}\right)^{3/2}-\left(\frac{k}{n}\right)^{3/2}\right]^2}$$

Mentre se $f(x)=1/\sqrt{x}$ allora $g(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$ e

$$\int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}dx = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{3}{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{n^2}+4\left[\left(\frac{k+1}{n}\right)^{1/2}-\left(\frac{k}{n}\right)^{1/2}\right]^2} \qquad [1.10]$$

Se vogliamo infine calcolare l'integrale di una qualsiasi funzione, dobbiamo scrivere

$$\int f(x)dx = \int \sqrt{f^2(x)}dx = \int \sqrt{1+f^2(x)-1}dx = \int \sqrt{1+h'(x)^2}\,dx \qquad [1.11]$$

ossia

$$h(x) = \int \sqrt{f^2(x) - 1}dx \qquad [1.12]$$

di modo che

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left[\frac{(b-a)}{n}\right]^2 + \left[h(k+1) - h(k)\right]^2} \qquad [1.13]$$

Osiamo calcolare l'integrale ellittico completo di seconda specie:

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}dx$$

in questo caso abbiamo

$$h(x) = \int \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x - 1}dx = -im\cos x$$

e

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left[\frac{\pi}{2n}\right]^2 - m^2\left[\cos\frac{(k+1)\pi}{2n} - \cos\frac{k\pi}{2n}\right]^2} \qquad [1.14]$$

Senza timore calcoliamo l'integrale ellittico completo di prima specie:

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}}$$

in questo caso abbiamo

$$h(x) = im\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}} = -i\sinh^{-1}\left(\frac{m\cos x}{\sqrt{1 - m^2}}\right)$$

e

$$K(m)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-m^2\sin^2 x}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left[\frac{\pi}{2n}\right]^2-\left[\sinh^{-1}\left(\frac{m\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}}{\sqrt{1-m^2}}\right)-\sinh^{-1}\left(\frac{m\cos\frac{k\pi}{2n}}{\sqrt{1-m^2}}\right)\right]^2}$$

[1.15]

Naturalmente c'è il rischio di cadere dalla padella alla brace della difficoltà computazionale. Ma a noi importa?

Osserviamo ancora un attimo la [1.11] la quale ci dice che, numericamente, l'area della superficie sottesa tra la curva $f(x)$ e l'asse delle ascisse è uguale alla lunghezza, tra gli stessi estremi, della curva della funzione $h(x)$ definita dalla [1.12].

Infine, giocando con una funzione del tipo $1/\sqrt{x}$ si può ottenere la relazione posta in apertura della sezione.

Il metodo di base, applicato alla funzione $(1\text{-}x^2)^{1/2}$ dove riconosciamo essere interessante passare da x a ix, permette di scrivere la notevole, ma lentissima, espressione

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{16}{n^2}-4\frac{(2k+1)^2}{n^4}}$$

le cui prime convergenti sono

$$\pi ::\left[\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{2\sqrt{11}}{9}+\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{55}}{8}+\frac{\sqrt{39}}{8}+\frac{\sqrt{15}}{8};\frac{2\sqrt{91}}{25}+\frac{2\sqrt{51}}{25}+\frac{2\sqrt{19}}{25}+\frac{2\sqrt{3}}{25};\ldots\right]$$

Essa può essere confrontata con la [1.7].