4. Fino alle radici

Abbiamo già trattato alcuni problemi relativi alle radici incapsulate all'infinito. Riprendo qui l'argomento cercando estensioni ed approfondimenti.

Ricordiamo che definiamo radice infinitamente incapsulata un'espressione del tipo

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\sqrt{\ldots+\sqrt{a_n}}}}} \qquad [4.1]$$

Abbiamo inoltre già trovato il valore dell'espressione [4.1] in alcuni casi semplici, in particolare quando tutti i termini sotto radice sono uguali: $a_1=a_2=\ldots=a_n=a>0$ abbiamo detto che detto x il valore limite cercato, abbiamo, senza ulteriori commenti che

$$x=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\ldots+\sqrt{a}}}}}$$

$$x^2=a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\ldots+\sqrt{a}}}}$$

$$x^2-a=x$$

Ma è lecito tutto questo? Eulerianamente sappiamo di sì, ma non è lecito impiegare il segno di uguaglianza, il più venerabile di tutta la Matematica, in maniera così semplicistica da sfiorare il superficiale e quindi l'errato.

Richiedendo a noi stessi un po' di rigore dobbiamo osservare che la successione

$$\sqrt{a},\quad \sqrt{a+\sqrt{a}},\quad \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\quad \ldots$$

è monotona crescente, è necessario quindi chiedersi se converge o diverge. A tal punto stabiliamo una catena di maggiorazioni valide per $a\geq\sqrt{2}$, che ritengo di per sé evidenti e che quindi non commento che alla fine

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\ldots+\sqrt{a}}}}}\leq\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\ldots+a}}}}=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\ldots+\sqrt{2a}}}}}\leq$$

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\ldots+\sqrt{2a}}}}\leq\ldots\leq\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{2a}}}\leq\sqrt{a+\sqrt{2a}}\leq\sqrt{2a}$$

Ad ogni passaggio abbiamo sostituito al valore $\sqrt{a+\sqrt{2a}}$ il valore, maggiorante, $\sqrt{a+a}$, perdendo, nella catena di successioni, un segno di radice.
Nel caso fosse $a<\sqrt{2}$ al primo passaggio il radicale più a destra sarebbe maggiorato dal valore $\sqrt{a+2}$ che è un numero maggiore di 1 ma minore di 2, che si mantiene tale con le successive estrazioni di radice per cui vale una nuova catena di maggiorazioni

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{...+\sqrt{a}}}}} < \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{...+\sqrt{a+2}}}}} < \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{...+\sqrt{a+2}}}} <$$

$$\sqrt{a+\sqrt{...+\sqrt{a+2}}} < .... < \sqrt{a+\sqrt{a+2}} < \sqrt{a+2}$$

Abbiamo dimostrato che per ogni valore reale di a la successione [4.1] è monotona crescente e limitata; per il teorema di Cauchy sulle successioni è quindi convergente e se ne può calcolare il valore limite x ad esempio come mostrato prima.

Complichiamoci la vita per rendercela più bella. Non è detto che a sia un valore costante; può essere a sua volta una successione. Ad esempio, come si comporta l'espressione, nella cui scrittura rinuncio proditoriamente alla formale operazioni di limite all'infinito che rimane comunque sottintesa:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n}}}}} \qquad [4.2]$$

Le cose sembrano complicarsi, perché il radicando cresce sempre di più, ma l'operazione di radice è potente, e smorza molte velleità, infatti abbiamo

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n}}}}} < \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+n/2}}}}} < \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{(3n-1)/2}}}}}$$

Abbiamo perso una radice sostituendo il suo valore con quello, maggiore, di metà del radicando. Continuiamo, sostituendo successivamente ad ogni radicando la sua metà

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{(3n-1)/2}}}}}$$

$$<\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{n-2+(3n-1)/4}}}}}=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{(7n-9)/4}}}}}$$

$$<\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{n-3+(7n-9)/8}}}}}=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{(15n-33)/8}}}}}$$

$$<\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{n-4+(15n-33)/16}}}}}=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{(31n-97)/16}}}}}$$

$$<\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{n-5+(31n-97)/32}}}}}=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{(63n-257)/32}}}}}$$

Mi sono dilungato per mostrare con evidenza il comportamento del radicando; al passo k-esimo, costituito da due step, esso è del tipo

$$\frac{(2^{k+1}-1)n-(k2^{k+1}+p2^{k-1}+1)}{2^k} \qquad p<n$$

Avendo in mente di effettuare un numero $k=n$ di passi, con un passaggio finale al limite, abbiamo

$$\frac{(2^{k+1}-1)n-((k-1)2^{k+1}+p2^{k-1}+1)}{2^k}\rightarrow\frac{n2^{n+1}n-(n-1)2^{n+1}}{2^n}=2$$

Otteniamo lo stesso risultato già visto in precedenza: la successione è monotona crescente ed è limitata dal valore 2, quindi è convergente. Il valore della somma è 1,757932756618…

Se invece della successione dei naturali consideriamo, ad esempio, quella dei numeri dispari il concetto non cambia nella sostanza, poiché sostituiamo a n il valore $2n+1$ e, a parte il coefficiente "2" che sostituisce il coefficiente "1" il comportamento del radicando non muta, infatti

$$\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{\ldots+\sqrt{2n+1}}}}}=1{,}850253128826\ldots$$

come pure

$$\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{6+\sqrt{...+\sqrt{2n}}}}} = 2{,}158476872311...$$

Senza alcuna difficoltà immaginiamo che una qualsiasi funzione lineare di n abbia lo stesso comportamento. Ovviamente è così e mostro i risultati nella tabella seguente dove nella seconda colonna abbiamo i radicali del tipo

$$r_1 = \sqrt{1+\sqrt{(1+t)+\sqrt{(1+2t)+\sqrt{...+\sqrt{(1+nt)}}}}}$$

e nella seconda i radicali del tipo

$$r_2 = \sqrt{2+\sqrt{(2+t)+\sqrt{(2+2t)+\sqrt{...+\sqrt{(2+nt)}}}}}$$

t	$r_1(1+nt)$	$r_2(2+nt)$
0	1,618033830	2
1	1,757932757	2,090327576
2	1,850253129	2,158476872
3	1,923121799	2,215217501
4	1,984543633	2,264587838
5	2,038215123	2,308678920
6	2,086207755	2,348748123
7	2,129819680	2,385623359
8	2,169926998	2,419884579
9	2,207153234	2,451956846
10	2,241960320	2,482162699
100	3,429412885	3,578944469
1.000	5,774711173	5,861988959
10.000	10,085268986	10,134970771
100.000	17,830777600	17,858841204
1.000.000	31,649765604	31,665567460
10.000.000	56,249310598	56,258200299
…		
$t\to\infty$	$t^{1/4}$	

Naturalmente per grandi valori di t i valori r_1 ed r_2 si avvicinano indefinitamente tra loro. La relazione dell'ultima riga è dovuto al fatto che, effettuando il rapporto tra due radici corrispondenti a potenze consecutive di 10 del parametro t otteniamo rapporti via via sempre più vicini al valore $1{,}7782794\ldots\approx 10^{1/4}$ così che, in un grafico log-log abbiamo asintoticamente un comportamento

lineare in cui ad un incremento di un fattore 10 della variabile indipendente t corrisponde un incremento del fattore $\sqrt{\sqrt{10}}$ della variabile dipendente r.

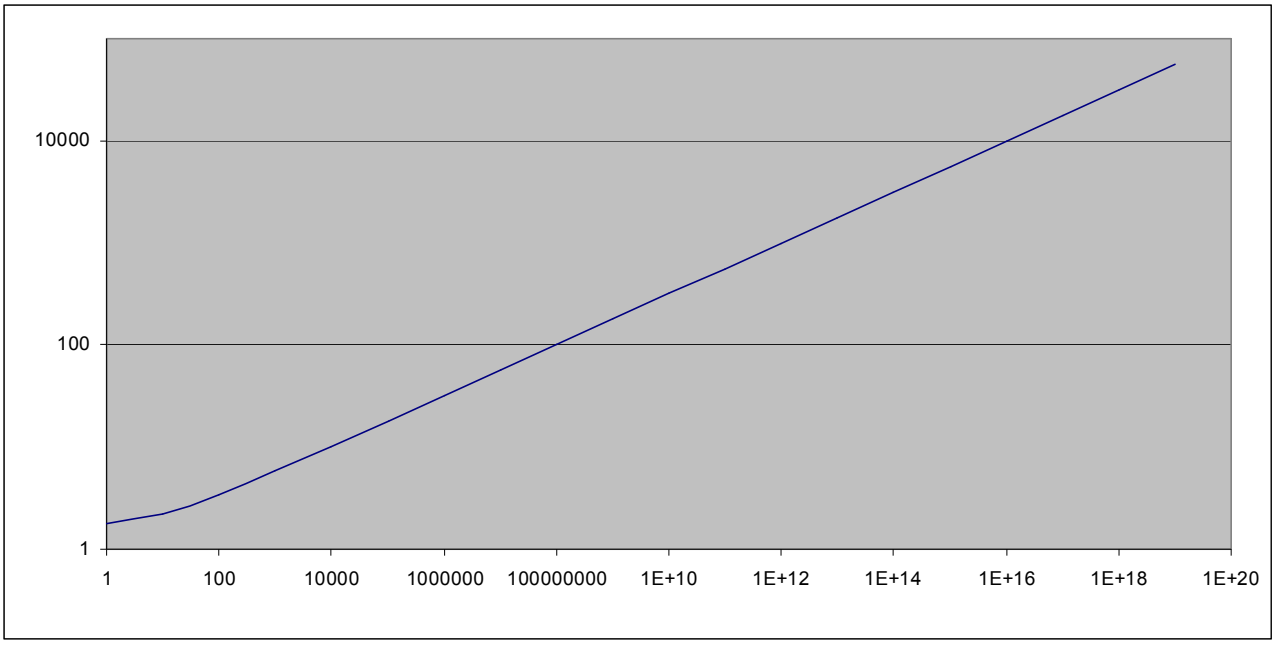

Grafico log-log delle radici

Può essere interessante calcolare per quali valori di t si abbia come radice un valore intero m. La tabella fornisce i valori cercati

m	$t(m_1)$	$t(m_2)$
2	4,2755705	2
3	52,1201789	37,5932682
4	203,1988067	174,6403589
5	541,4616711	494,8920310
6	1174,9005302	1106,3254977
7	2235,5129334	2140,9348554
8	3879,2979260	3754,7179490
9	6286,2550702	6127,6736789
10	9660,3841421	9463,8020060
…		
$m \to \infty$	m^4	

La natura convergente del radicale non cambia se utilizziamo una qualsiasi espressione lineare in n come

$$r_a = \sqrt{a + \sqrt{(a+t) + \sqrt{(a+2t) + \sqrt{\ldots + \sqrt{(a+nt)}}}}}$$

A solo titolo di esempio riporto

$$\sqrt{e + \sqrt{(e+1) + \sqrt{(e+2) + \sqrt{\ldots + \sqrt{(e+n)}}}}} = 2{,}294876489651$$

$$\sqrt{\pi + \sqrt{(\pi+1) + \sqrt{(\pi+2) + \sqrt{\ldots + \sqrt{(\pi+n)}}}}} = 2{,}405935389676$$

$$\sqrt{-0{,}541754 + \sqrt{(-0{,}541754+1) + \sqrt{(-0{,}541754+2) + \sqrt{\ldots + \sqrt{(-0{,}541754+n)}}}}} = 1$$

$$\sqrt{-1{,}04982607 + \sqrt{(-1{,}04982607+1) + \sqrt{(-1{,}04982607+2) + \sqrt{\ldots + \sqrt{(-1{,}04982607+n)}}}}} = 0{,}5$$

$$\sqrt{4{,}4591617105 + \sqrt{(4{,}4591617105+1) + \sqrt{(4{,}4591617105+2) + \sqrt{\ldots + \sqrt{(4{,}4591617105+n)}}}}} = e$$

$$\sqrt{6{,}54695383 + \sqrt{(6{,}54695383+1) + \sqrt{(6{,}54695383+2) + \sqrt{\ldots + \sqrt{(6{,}54695383+n)}}}}} = \pi$$

Se funziona con la successione degli interi cosa succede con la successione dei quadrati? Cioè qual è il comportamento di

$$\sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{9 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n^2}}}}} \qquad [4.3]$$

Le cose continuano a non cambiare. Anche se apparentemente la presenza dei quadrati sembra non riuscire ad essere imbrigliata dalla radice quadrata, in effetti non è così. Ce ne convinciamo con un semplice ragionamento: la radice del quadrato del ternine n-esimo è naturalmente n; quando sommiamo questo termine al radicando successivo, che è $(n-1)^2$ otteniamo il numero n^2-n+1 la cui radice è certamente inferiore ad n, anche se è maggiore di n-1. Chiamando r_n la radice del termine n-simo abbiamo quindi una successione decrescente

$$r_n = n > r_{n-1} > (n-1) > r_{n-2} > (n-2) > \ldots > 3 > r_2 > 2 > r_1 > 1$$

siamo riusciti a stabilire che la successione è limitata dal numero 2 e che quindi converge. Tale risultato giustifica immediatamente, a fortiori, il comportamento di [4.2]. In particolare

$$\sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^2}}}}} = 1{,}94265542276$$

Potete ben divertirvi, sulla falsariga di quanto fatto prima a calcolare espressioni lineari in n^2 o anche polinomi di secondo grado in n come il caro (dite perchè)

$$\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{19+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^2-n-1}}}}}} = 2$$

o ancora di sequenze "strane" anche se a noi molto familiari

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{F_n}}}}}} = 1{,}661982462\ldots$$

Anche i cubi vengono facilmente addomesticati:

$$\sqrt{1+\sqrt{8+\sqrt{27+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^3}}}}} = 2{,}17678859713$$

In effetti una qualsiasi potenza k dei naturali ha il seguente comportamento: la radice della potenza k è pari a $n^{k/2}$. Quando sommiamo questo valore al radicando immediatamente a sinistra, otteniamo l'espressione

$$(n\text{-}1)^k + n^{k/2}$$

come già visto, la radice di questo numero è maggiore di $(n\text{-}1)^{k/2}$ ma inferiore a $n^{k/2}$. Stabiliamo la catena di disuguaglianze per l'intera successione

$$r_n = n^{k/2} > r_{n\text{-}1} > (n\text{-}1)^{k/2} > r_{n\text{-}2} > (n\text{-}2)^{k/2} > \ldots > 3^{k/2} > r_2 > 2^{k/2} > r_1 > 1$$

ed abbiamo così provato che per ogni potenza $k>1$ l'espressione

$$\sqrt{1+\sqrt{2^k+\sqrt{3^k+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^k}}}}} \qquad [4.4]$$

ammette una maggiorante, le sue ridotte formano una successione di Cauchy, cioè l'espressione converge. Abbiamo in effetti anche trovato il limite superiore, che è $2^{k/2}$. Infatti

$$\sqrt{1+\sqrt{2^4+\sqrt{3^4+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^4}}}}} = 2{,}46740453172 < 2^2$$

$$\sqrt{1+\sqrt{2^5+\sqrt{3^5+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^5}}}}} = 2{,}82348151283 < 4\sqrt{2}$$

Il valore dell'esponente k per il quale il radicale [4.4] vale proprio k è 15,757997…. Quando k=4,7245541… il radicale vale e; quando k=5,75358614… il radicale vale π.

Per la stessa legge anche il terribile esponenziale deve capitolare

$$\sqrt{1+\sqrt{e+\sqrt{e^2+\sqrt{\ldots+\sqrt{e^n}}}}} = 1{,}87260722380019\ldots$$

non diversamente da π

$$\sqrt{1+\sqrt{\pi+\sqrt{\pi^2+\sqrt{\ldots+\sqrt{\pi^n}}}}} = 1{,}9183579619077\ldots$$

Se converge la [4.4] non ci poniamo neppure il problema della convergenza di radicali contenenti potenze frazionarie o negative, i cui termini decrescono man mano che i radicali si annidano, figuriamoci ….

$$\sqrt{1+\sqrt{2^{1/2}+\sqrt{3^{1/2}+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^{1/2}}}}}} = 1{,}68253440992\ldots$$

$$\sqrt{1+\sqrt{2^{1/3}+\sqrt{3^{1/3}+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^{1/4}}}}}} = 1{,}65982737319\ldots$$

$$\sqrt{1+\sqrt{2^{1/4}+\sqrt{3^{1/5}+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^{1/5}}}}}} = 1{,}64253030288\ldots$$

….

per arrivare dove già sappiamo, cioè

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{2^{1/k}+\sqrt{3^{1/k}+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^{1/k}}}}}}=1{,}618033988750\ldots=\Phi$$

D'altro canto abbiamo

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{\ldots+\sqrt{\frac{1}{n}}}}}}=1{,}52189038686\ldots$$

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2^2}+\sqrt{\frac{1}{3^2}+\sqrt{\ldots+\sqrt{\frac{1}{n^2}}}}}}=1{,}46672356417\ldots$$

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2^3}+\sqrt{\frac{1}{3^3}+\sqrt{\ldots+\sqrt{\frac{1}{n^3}}}}}}=1{,}43934039788\ldots$$

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2^4}+\sqrt{\frac{1}{3^4}+\sqrt{\ldots+\sqrt{\frac{1}{n^4}}}}}}=1{,}42630766133\ldots$$

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2^5}+\sqrt{\frac{1}{3^5}+\sqrt{\ldots+\sqrt{\frac{1}{n^5}}}}}}=1{,}4200918769\ldots$$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2^k}+\sqrt{\frac{1}{3^k}+\sqrt{\ldots+\sqrt{\frac{1}{n^k}}}}}}=1$$

Converge naturalmente per ogni valore di a l'espressione

$$s(a)=\sqrt{a+\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a}{3}+\sqrt{\ldots+\sqrt{\frac{a}{n}}}}}}$$

che mettiamo in tabella

a	$s(a)$	$s(a)/\sqrt{a}$
1	1,5218903869	1,52189039
2	1,8851995971	1,33303742
3	2,1799278061	1,25858191
4	2,4341865829	1,21709329
5	2,6610105248	1,19004008
6	2,8676807648	1,17072577
7	3,0587457417	1,15609722
8	3,2372688477	1,14454738
9	3,4054283820	1,13514279
10	3,5648382320	1,12730083
…		
$a\to\infty$	$\sqrt{a}+0{,}35355\ldots$	1

Un ultimo passo temerario verso l'alto: cosa dire di

$$\sqrt{1+\sqrt{2^2+\sqrt{3^3+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^n}}}}} \qquad [4.5]$$

Procediamo come prima con le stesse notazioni, osservo che il valore della radice più interna è $n^{n/2}$, il radicando immediatamente a sinistra è pertanto $(n\text{-}1)^{n\text{-}1}+n^{n/2}$, la sua radice è minore di $n^{n/2}$, anche se maggiore di $(n\text{-}1)^{n/2}$ e così via risalendo verso sinistra possiamo stabilire la seguente catena di disuguaglianze

$$r_n = n^{n/2} > r_{n\text{-}1} > (n\text{-}1)^{n/2} > r_{n\text{-}2} > (n\text{-}2)^{(n\text{-}1)/2} > \ldots > 3^{4/2} > r_2 > 2^{3/2} > r_1 > 1$$

infatti

$$\sqrt{1+\sqrt{2^2+\sqrt{3^3+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^n}}}}} = 2{,}06617668642405\ldots$$

mentre

$$\sqrt{1+\sqrt{2^4+\sqrt{3^6+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^{2n}}}}}} = 2{,}8090279675624\ldots$$

$$\sqrt{1+\sqrt{2^6+\sqrt{3^9+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^{3n}}}}}} = 3{,}9716593105817\ldots$$

ssintoticamente (grandi valori di s)

$$\sqrt{1+\sqrt{2^{2s}+\sqrt{3^{3s}+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^{ns}}}}}} \approx 1{,}51^s$$

grande quanto si vuole ma non infinito.

Molto più addomesticabile, perché maggiorata da [4.5] è

$$\sqrt{1+\sqrt{2!+\sqrt{3!+\sqrt{\ldots+\sqrt{n!}}}}} = 1{,}8270147176086\ldots \qquad [4.6]$$

Tutto quanto abbiamo avuto modo di vedere è immediatamente estensibile a radicali di ordine qualsiasi: un unico esempio

$$x = \sqrt[p]{a+\sqrt[p]{a+\sqrt[p]{a+\sqrt[p]{\ldots+\sqrt[p]{a}}}}} \qquad [4.7]$$

la cui risolvente è

$$x^p = a + x$$

che abbiamo già studiato in altra occasione per altre vie.