

## 16. Irragionevole

Una delle storie che circola attorno alla proporzione aurea è quella secondo cui il rettangolo i cui lati sono in “media ed estrema ragione” (ossia in rapporto pari a  $\phi$ ) sarebbe il più gradevole e gli esempi sarebbero molti (la pianta del Partenone).



Fig. 1: Il rettangolo aureo

Costruiamo una successione di rettangoli aurei nel seguente modo. Partiamo dal rettangolo di lati  $R_1:[1, 2]$ , da questo costruiamo il rettangolo il cui lato minore è pari al maggiore del precedente ed il cui maggiore è pari alla semisomma del perimetro del precedente, quindi  $R_2:[2, 3]$ ; procediamo ed abbiamo  $R_3:[3, 5]$ ; ...;  $R_n:[F_{n-1}, F_n]$ .

Ora sistemiamo i rettangoli nel modo seguente: il vertice in alto a sinistra del rettangolo  $n$ -simo è posizionato, rispetto al vertice analogo del rettangolo precedente  $[(n-1)$ -esimo], con uno spostamento in basso e a destra pari alle rispettive dimensioni del rettangolo ancora precedente  $[(n-2)$ -esimo]. Si ottiene lo schema della figura 2.

Ciascun rettangolo rimane diviso in quattro settori (indicati con le lettere  $a, b, c, d$  circolate). Due rettangoli (quelli indicati dalle lettere  $a, d$ ) sono a loro volta aurei; un terzo (indicato con la lettera  $b$ ) è un quadrato, il quarto (indicato con la lettera  $c$ ) è di nuovo la somma di un rettangolo aureo e di un quadrato.

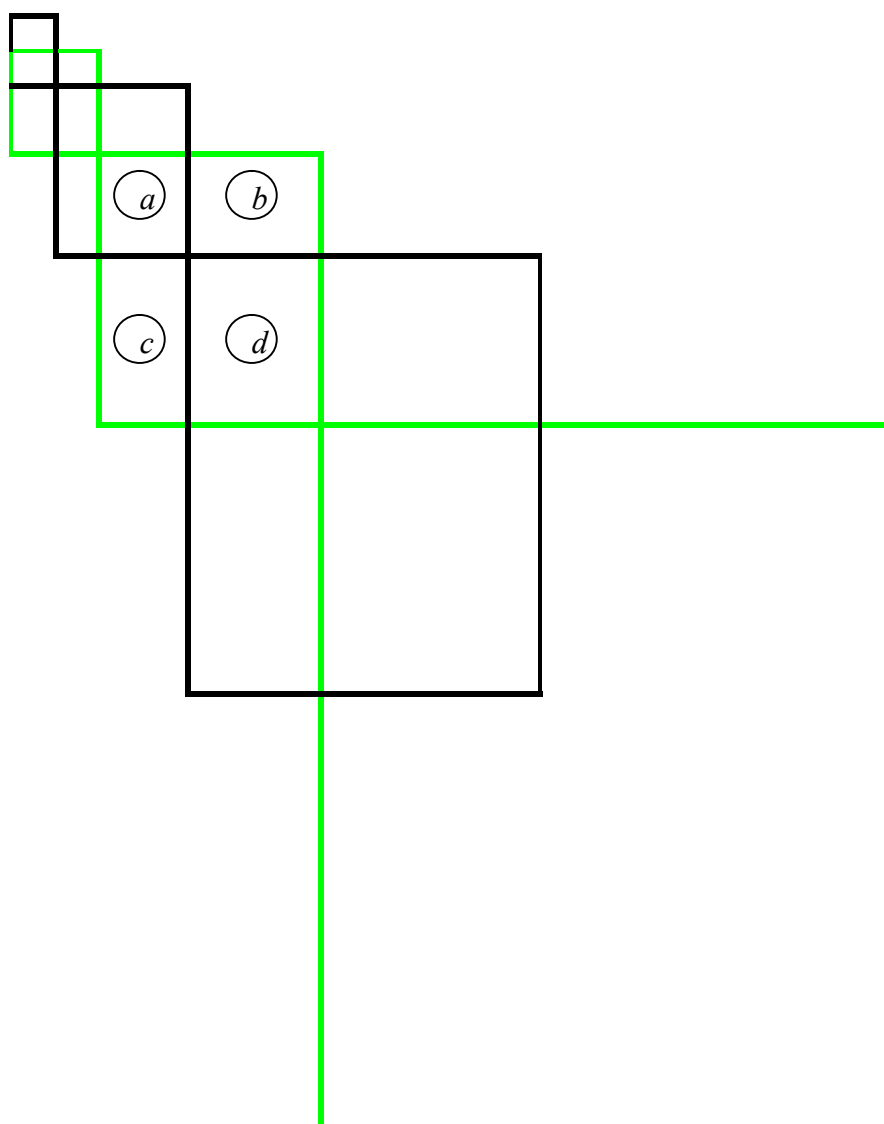


Fig. 2: Disposizione dei rettangoli aurei

Infatti possiamo scrivere, per il rettangolo  $n$ -simo:

$$\begin{aligned}
 F_{n-1} \cdot F_n &= (F_{n-2} + F_{n-3}) \cdot (F_{n-1} + F_{n-2}) = (F_{n-1} \cdot F_{n-2} + F_{n-3} \cdot F_{n-2}) + F_{n-2}^2 + (F_{n-4} \cdot F_{n-3} + F_{n-3}^2) = \\
 &= F_{n-1} \cdot F_{n-2} + F_{n-2} \cdot F_{n-3} + F_{n-3} \cdot F_{n-4} + F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2
 \end{aligned}$$

Se tracciamo la retta che unisce il vertice in alto a destra del primo rettangolo (in nero) con il vertice analogo del sesto rettangolo (in verde) vediamo che essa sfiora ma non passa per i vertici in alto a destra dei rettangoli intermedi.

Il motivo sta nel fatto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad [16.1]$$

Cosa vuol dire? Lo vedremo ora con un altro esempio.

È notissimo che le radici quadrate dei numeri interi che non siano quadrati perfetti sono per definizione irrazionali. Consideriamo il valore  $\sqrt{3}$ . Diciamo che il suo valore è  $\alpha$ . Poiché  $\alpha = 3/\alpha$ , se  $x$  è un'approssimazione, ad esempio per eccesso, di  $\alpha$ ;  $3/x$  lo sarà per difetto e viceversa; ha senso quindi considerare come migliore il valore medio tra i due, che chiamiamo  $x' = (x + 3/x)/2$ ; possiamo ottenere un valore ancora più vicino a quello di  $\alpha$ , che chiamiamo  $x''$ , ponendo  $x'' = (x' + 3/x')/2$ .

Naturalmente possiamo iterare il procedimento e porre  $x^{(n+1)} = (x^{(n)} + 3/x^{(n)})/2$ . Se partiamo con un valore razionale per  $x = p/d$  tutti i valori successivi generati saranno razionali:

$$\frac{p_{n+1}}{d_{n+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{p_n}{d_n} + 3 \frac{d_n}{p_n} \right)$$

Il discorso non cambia se abbiamo a che fare con la radice quadrata di un qualsiasi numero intero (ma non solo)  $k$ : abbiamo la formula per ricorrenza

$$\frac{p_{n+1}}{d_{n+1}} = \frac{p_n^2 + k d_n^2}{2 p_n d_n} \quad [16.2]$$

Essa è un approssimante razionale, buona quanto si vuole, per  $\sqrt{k}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n^2 + k d_n^2}{2 p_n d_n} = \sqrt{k} \quad [16.3]$$

L'iterazione funziona molto bene; si raddoppia l'ordine della precisione ad ogni passaggio; in genere, anche per valori grandi di  $k$  e partendo dalla pessima approssimazione  $p_2 = k/2$ ;  $d_2 = 1$  si ottiene un valore preciso alla decima cifra in meno di 10 iterazioni.

Il metodo (e quindi il bello) non finisce qui. Possiamo cercare non solo le radici quadrate, ma anche le cubiche, le quarte ... come segue. Uso lo stesso tipo di notazioni: se  $\beta = k^{1/r}$ , allora una approssimazione  $x$  per  $\beta$  (ad esempio per difetto) produce una approssimazione (per eccesso)  $k/x^{r-1}$  per cui la media  $(x + k/x^{r-1})$  è senz'altro migliore, partendo dal razionale  $x = p/d$  si può pertanto impostare l'iterazione

$$\frac{p_{n+1}}{d_{n+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{p_n}{d_n} + k \frac{d_n^{r-1}}{p_n^{r-1}} \right)$$

ovvero

$$\frac{p_{n+1}}{d_{n+1}} = \frac{p_n^r + kd_n^r}{2d_n p_n^{r-1}} \rightarrow \sqrt[r]{k} \quad [16.4]$$

dove in ultimo si è effettuato il passaggio al limite ( $n$  all'infinito).

Cosa hanno in comune i procedimenti [16.1], [16.3] e [16.4]? Il fatto che il limite di un algoritmo che opera sui numeri razionali è un numero che razionale non è.

In effetti, il concetto stesso di infinito si basa su un “passaggio al limite” concettuale che genera situazioni apparentemente paradossali; ancora qualche esempio:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

dove le somme sono più che irrazionali, addirittura trascendenti.

La quinta delle nozioni comuni di Euclide (Libro I degli Elementi) ci dice che “Il tutto è maggiore della parte”. Ma questo funziona, ben si sa, solo se il tutto è un insieme contenente un numero finito di elementi; quando ciò non avviene siamo nei pasticci: sappiamo bene che il numero di numeri pari si può mettere in corrispondenza biunivoca con il numero dei naturali (mediante l'applicazione  $n \rightarrow 2n$ ) anche se intuitivamente ne sono sola la metà (mancano tutti i dispari).

D'altronde Dedekind ha mostrato, con la sua teoria del “taglio” che i numeri reali in effetti esistono come elementi di separazione di due classi distinte: quella di tutti i razionali inferiori e quella di tutti i razionali superiori. Le due classi sono vicine quanto si vuole (è il concetto di limite) ma sono disgiunte e separate appunto dal numero reale in questione.

Mi sento di dire che i numeri reali, in barba al nome che portano, non esistono dal punto di vista computazionale, ma solo come pura astrazione concettuale. Sono identificati da simboli ( $\sqrt{2}$ ;  $e$ ;  $\pi$ ) ovvero da proprietà ( $x^2-2=0$ ; i limiti visti oppure valori di serie o di integrali definiti) ma non sono computabili se non attraverso una *ragionevole* approssimazione, pur buona quanto si vuole.