1. Abeliane

Tra le opere del grande Norvegese mi hanno colpito le due lunghe memorie *Recherches sur les fonctions elliptiques* (Oeuvres complètes, Tomo I, XVI, pag. 263 ss. in Christiania, 1881) e *Théorie des transcendantes elliptiques* (Tomo II, XIII, pag. 87 ss.). Nella prima il Nostro parte dall'osservazione che l'immortale Eulero dimostra che l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}}+\frac{dy}{\sqrt{R_4(y)}} \qquad [1.1]$$

ammette un integrale algebrico; nella fattispecie $R_4(x)$ è un polinomio di quarto grado.
Nella seconda, postuma, amplia il discorso e tratta gli integrali

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{R(x)}} \qquad [1.2]$$

Ove $P(x)$ è una funzione razionale. Egli dimostra due fatti fondamentali:

1. Esiste una classe di integrali irriducibili mediante una combinazione dei quali è esprimibile la [1.2]
2. La classe di integrali [1.2] ammette primitive algebriche

Nel caso $P(x)$ sia un polinomio allora la combinazione lineare è la seguente

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R(x)}}=\left[\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},\int \frac{xdx}{\sqrt{R(x)}},\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R(x)}}\right] \qquad [1.3]$$

La teoria è generale e formidabile e permette di risolvere ad esempio, nel paragrafo 10, la situazione

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1+2x+3x^2+4x^3+5x^4}}=\frac{x-1}{15}\sqrt{1+2x+3x^2+4x^3+5x^4}$$

Nel caso $P(x)$ è l'inverso di una potenza allora la combinazione lineare è la seguente

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R(x)}}=\left[\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},\int \frac{xdx}{\sqrt{R(x)}},\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R(x)}},\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}}\right] \qquad [1.4]$$

Se (x-a) è un fattore di R allora il quarto integrale non compare.

Successivamente, nel capitolo II, Abel integra le funzioni del tipo [1.2] mediante logaritmi, fatto che non consideriamo qui.

Per compiere il nostro viaggio allora partiremo dalla soluzione per capire qual è il problema.

Consideriamo in prima istanza il caso in cui R sia un polinomio di terzo grado e troviamo quale sia la funzione che genera la primitiva

$$(x-a)\sqrt{1+px+qx^2+rx^3} \qquad [1.5]$$

Differenziando otteniamo

$$\frac{5rx^3+(4q-3ar)x^2+(3p-2aq)x+2-ap}{2\sqrt{1+px+qx^2+rx^3}}$$

Siamo in grado di imporre una serie di condizioni, quali

I. Il numeratore sia un monomio in x^3, allora avremo

$$\begin{cases} 4q-3ar=0 \\ 3p-2aq=0 \\ 2-ap=0 \end{cases}$$

$$p=2/a; \quad q=3/a^2; \quad r=4/a^3$$

$$\frac{10x^3}{a^3\sqrt{1+\frac{2}{a}x+\frac{3}{a^2}x^2+\frac{4}{a^3}x^3}}$$

di modo che

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^6+2a^5x+3a^4x^2+4a^3x^3}}=\frac{(x-a)}{10}\sqrt{a^6+2a^5x+3a^4x^2+4a^3x^3}$$

II. Il numeratore sia un binomio in x^3, allora avremo

$$\begin{cases} 4q-3ar=1 \\ 3p-2aq=0 \\ 2-ap=1 \end{cases}$$

$$p=1/a; \quad q=3/a^2; \quad r=2/a^3$$

$$\frac{20x^3 + 2a^3}{a^3\sqrt{1 + \frac{1}{a}x + \frac{3}{2a^2}x^2 + \frac{2}{a^3}x^3}}$$

di modo che

$$\int \frac{\left(10x^3 + a^3\right)dx}{\sqrt{4a^6 + 4a^5 x + 6a^4 x^2 + 8a^3 x^3}} = \frac{(x-a)}{2a^3}\sqrt{4a^6 + 4a^5 x + 6a^4 x^2 + 8a^3 x^3}$$

III. Il numeratore sia un binomio spurio in x^3, allora avremo

$$\begin{cases} 4q - 3ar = 1 \\ 3p - 2aq = 0 \\ 2 - ap = 0 \end{cases}$$

$$p = 2/a; \quad q = 3/a^2; \quad r = (12 - a^2)/a^3$$

$$\frac{5rx^3 + x^2}{2\sqrt{1 + \frac{2}{a}x + \frac{3}{a^2}x^2 + rx^3}}$$

IV. Il numeratore sia un binomio spurio in x^3, allora avremo

$$\begin{cases} 4q - 3ar = 0 \\ 3p - 2aq = 1 \\ 2 - ap = 0 \end{cases}$$

$$p = 2/a; \quad q = (6-a)/12a^2; \quad r = (6-a)/9a^3$$

$$\frac{5rx^3 + x}{2\sqrt{1 + \frac{2}{a}x + qx^2 + rx^3}}$$

Consideriamo ora il caso in cui R sia un polinomio di quarto grado e troviamo quale sia la funzione che genera la primitiva

$$(x-a)\sqrt{1+px+qx^{2.}+rx^3+sx^3} \qquad [1.6]$$

Differenziando otteniamo

$$\frac{6rx^4+(5r-4as)x^3+(4q-3ar)x^2+(3p-2aq)x+2-ap}{2\sqrt{1+px+qx^{2.}+rx^3+sx^3}}$$

È interessante il caso particolare

$$(x-a)\sqrt{1\pm x^4} \qquad [1.7]$$

il cui differenziale è

$$\frac{1\mp 2ax^3\pm 3x^4}{\sqrt{1\pm x^4}}$$

per cui

$$\int \frac{1\mp 2ax^3\pm 3x^4}{\sqrt{1\pm x^4}}dx=(x-a)\sqrt{1\pm x^4}$$

Ancora, differenziando

$$(x-a)\sqrt{1\pm x^5} \qquad [1.8]$$

abbiamo che

$$\int \frac{2\mp 5ax^4\pm 7x^5}{2\sqrt{1\pm x^5}}dx=(x-a)\sqrt{1\pm x^5}$$

– o – o –

A seguire c’è un’altra chicca: lo studio (mutuato da Legendre) della funzione

$$\psi(x)=x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots \qquad |x|\le 1 \qquad [1.9]$$

La somma non si esprime in forma chiusa, ma la funzione $\psi(x)$ gode di proprietà molto interessanti. Cominciamo con il differenziarla:

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n} + \ldots$$

a secondo membro riconosciamo lo sviluppo in serie del logaritmo diviso per la variabile:

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = -\frac{\log(1-x)}{x} \qquad [1.10a]$$

$$\psi(x) = -\int \frac{\log(1-x)}{x}dx \qquad [1.10b]$$

se si effettua la sostituzione che manda x in 1-t e dx = - dt:

$$\frac{d}{dt}\psi(1-t) = \frac{\log t}{1-t}$$

sommando i due differenziali, una volta ripristinata la variabile muta x:

$$\frac{d}{dx}[\psi(x)+\psi(1-x)] = -\frac{\log(1-x)}{x} + \frac{\log x}{1-x}$$

Possiamo integrare membro a membro

$$\int [\psi(x)+\psi(1-x)] = -\int \left[\frac{\log(1-x)}{x} - \frac{\log x}{1-x}\right]dx$$

Posto x=p e log(1-x)=q l'integrando diviene pdq+qdp ovvero $d(pq)$ per cui

$$\int [\psi(x)+\psi(1-x)] = -\int d(\log x \cdot \log(1-x))$$

ossia

$$\psi(x)+\psi(1-x) = -\log x \cdot \log(1-x) + c$$

La costante di integrazione si ottiene ponendo x=0: il prodotto dei logaritmi si annulla (verificare con de l'Hôpital) e resta

$$\psi(1) = c = \frac{\pi^2}{6} \qquad [1.11]$$

Per cui abbiamo l'equazione funzionale fondamentale per $\psi(x)$:

$$\psi(x) + \psi(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \log x \cdot \log(1-x) \qquad [1.12]$$

Ora possiamo specializzare qualche caso: sia $x = \frac{1}{2}$: allora

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\log^2\frac{1}{2} \approx 0{,}582240526465\ldots$$

Se nella [1.9] poniamo $-x$ in luogo di x le potenze dispari cambiano segno per cui la somma

$$\psi(x) + \psi(-x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{3^2} + \ldots\right)$$

e otteniamo un'altra equazione funzionale per $\psi(x)$:

$$\psi(x) + \psi(-x) = \frac{1}{2}\psi\left(x^2\right) \qquad [1.13]$$

col che

$$\psi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \psi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{4}\log^2\frac{1}{2} \approx 0.2911202632325\ldots$$

Se ora $x = -1$:

$$\psi(-1) = -\psi(-x) + \frac{1}{2}\psi(1) = -\frac{1}{2}\psi(1) = -\frac{\pi^2}{12}$$

ritrovando il risultato precedente.

Possiamo ancora usare la [1.10] ove sostituiamo a x il valore $\frac{t}{1+t}$, col che $dx = \frac{dt}{(1+t)^2}$

$$\psi\left(\frac{t}{1+t}\right) = -\int \frac{(1+t)\log(1+t)}{(1+t)^2 t} dt = -\int \frac{\log(1+t)}{(1+t)t} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\log(1+t)dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t}\log(1+t) - \int \frac{\log(1+t)dt}{1+t}$$

ma

$$\int \frac{dt}{t}\log(1+t) = -\psi(-t)$$

e quindi, rispristinando la variabile muta x:

$$\psi\left(\frac{x}{1+x}\right) + \psi(-x) = -\frac{1}{2}\log^2(1+x) \qquad [1.14]$$

oppure, usando la [1.13]:

$$\psi\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{2}\psi(x^2) + \frac{1}{2}\log^2(1+x) = \psi(x) \qquad [1.15]$$

Se in [1.15] imponiamo $\frac{x}{1+x} = x^2$ ossia $x^2 + x = 1$ cioè $x = \varphi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ il numero aureo, col che $x^2 = 1 - \varphi$ e ancora $\dfrac{x}{1+x} = \varphi^2 = 1 - \varphi$ avremo:

$$\frac{3}{2}\psi(1-\varphi) - \psi(\varphi) = -\frac{1}{2}\log^2(1+\varphi) = -\frac{1}{2}\log^2\varphi$$

Nel caso presente la [1.12] diviene

$$\psi(\varphi) + \psi(1-\varphi) = \frac{\pi^2}{6} - \log\varphi \cdot \log(1-\varphi) = \frac{\pi^2}{6} - 2\log^2\varphi$$

Sommando le ultime due:

$$\frac{3}{2}\psi(1-\varphi) - \psi(\varphi) + \psi(\varphi) + \psi(1-\varphi) = -\frac{1}{2}\log^2\varphi + \frac{\pi^2}{6} - 2\log^2\varphi$$

ovvero

$$\psi(1-\varphi)=\frac{\pi^2}{15}-\log^2\varphi\approx 0{,}426408806...$$

e sottraendo

$$\psi(\varphi)=\frac{\pi^2}{10}-\log^2\varphi\approx 0{,}7553956195...$$

infine

$$\psi(\varphi)-\psi(1-\varphi)=\frac{\pi^2}{30}\approx 0{,}328986813...$$

cioè

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi^k-(1-\varphi)^k}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi^k-\varphi^{2k}}{k^2}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

mentre

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi^k+(1-\varphi)^k}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi^k+\varphi^{2k}}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}-2\log^2\varphi$$

Da [1.13]

$$\psi(\varphi)+\psi(-\varphi)=\frac{1}{2}\psi(1-\varphi)$$

quindi

$$\psi(-\varphi)=\frac{1}{2}\psi(1-\varphi)-\psi(\varphi)=\frac{\pi^2}{30}-\frac{1}{2}\log^2\varphi-\frac{\pi^2}{10}+\log^2\varphi=-\frac{\pi^2}{15}+\frac{1}{2}\log^2\varphi\approx$$

$$\approx -0.54219121645069$$

Ancora da [1.14]

$$\psi\left(\frac{\varphi}{1+\varphi}\right)+\psi(-\varphi)=-\frac{1}{2}\log^2(1+\varphi)$$

e

$$\psi\left(\frac{\varphi}{1+\varphi}\right)=\frac{\pi^2}{15}-\frac{1}{2}\log^2(1+\varphi)-\frac{1}{2}\log^2\varphi\approx 0.426408806162\ldots$$

Abbiamo ottenuto in tal modo i valori di ψ (definiti in [-1,+1]) in 8 punti differenti:

$$-1,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\varphi,-\varphi,1-\varphi,\frac{\varphi}{1+\varphi}$$

Un calcolo numerico diretto della serie [1.9] genera il grafico seguente:

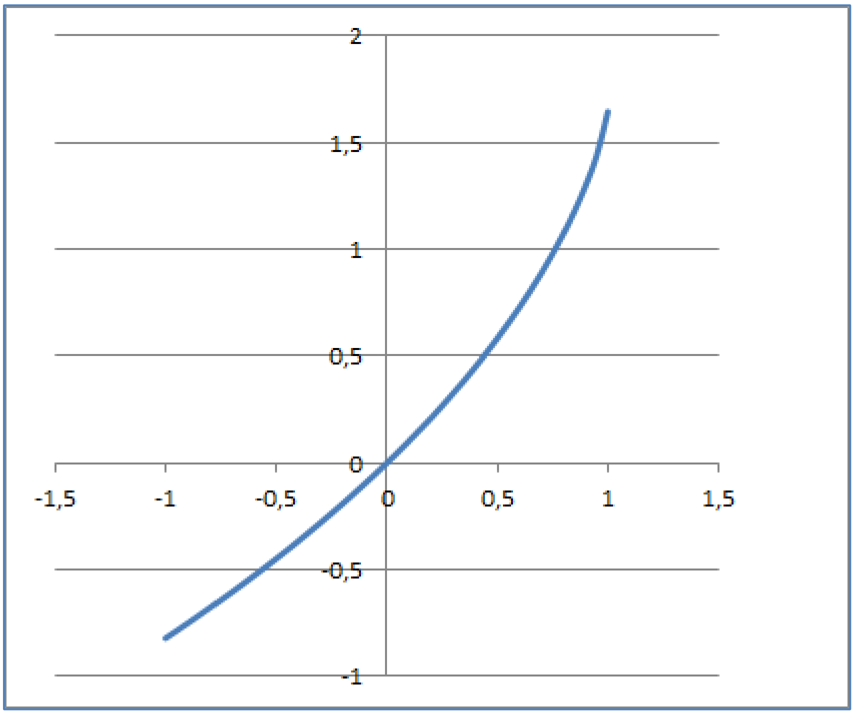

Grafico di ψ

Dalla definizione

$$\psi(x)-\psi(-x)=x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+\cdots+x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\cdots=2x\left(1+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^4}{5^2}+\frac{x^6}{7^2}\ldots\right)$$

Dalla [1.10a] differenziando ancora abbiamo

$$\psi''=\frac{1}{x(1-x)}-\frac{\psi'}{x}$$

e l'equazione differenziale del secondo ordine per ψ è

$$x(1-x)\psi''+(1-x)\psi'=1 \qquad [1.16]$$

Passiamo agli integrali.

Integrando per parti e facendo uso della [1.10b]:

$$\int \psi(x)dx = x\psi + \int \log(1-x)\,dx = x\psi + (1-x)[1-\log(1-x)] \qquad [1.17]$$

Invece per $\int \psi(x^2)dx$, con la sostituzione $x^2 = t$ e tenendo sempre presente il valore della derivata di ψ abbiamo

$$\int \psi(x^2)dx = \int \frac{\psi(t)}{2\sqrt{t}}dt = \sqrt{t}\psi(t) + \int \frac{\log(1-t)}{\sqrt{t}}dt$$

l'ultimo integrale vale

$$2\sqrt{t}\log(1-t) + 2\big(\log(1+\sqrt{t}) - 2\sqrt{t}\big) - 2\log(|\sqrt{t}-1|)$$

ripristinando la variabile originaria:

$$\int \psi(x^2)dx = x\psi(x^2) + 2x\log(1-x^2) - 2\log\left|\tfrac{x+1}{x-1}\right| - 4x \text{ se} \qquad x > 0$$

$$\int \psi(x^2)dx = -x\psi(x^2) - 2x\log(1-x^2) - 2\log\left|\tfrac{x-1}{x+1}\right| + 4x \qquad \text{se } x < 0$$

Per l'integrale del quadrato:

$$\int \psi^2(x)dx = x\psi^2 + 2\int \psi\log(1-x)\,dx$$

Per i momenti:

$$\int x\psi\,dx = \frac{x^2}{2}\psi + \frac{1}{2}\int x\log(1-x)\,dx = \frac{1}{4}x^2[2\psi + \log(1-x)] - \frac{1}{4}[x(x+2) + 2\log(1-x)]$$

[1.18]

Infine calcoliamo $\int \psi\left(\frac{x}{1+x}\right)dx$. Con la posizione $\frac{x}{1+x} = t$ abbiamo $dx = \frac{dt}{(1-t)^2}$ e

$$\int \psi\left(\frac{x}{1+1}\right)dx = \int \frac{\psi(t)dt}{(1-t)^2}$$

Torniamo alla [1.17]:

$$\int \psi(x)dx = x\psi + (1-x)[1-\log(1-x)] + c$$

Ponendo $x = 0$ e tenendo presente il limite del prodotto intermedio otteniamo $c = -1$. Questo ci dice che

$$\int \psi(x)dx = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n^2(n+1)} = x\psi + (1-x)[1-\log(1-x)] - 1$$

per cui

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}=\psi(1)-1=\frac{\pi^2}{6}-1$$

\

La [1.18] ha costante di integrazione nulla, ora

$$\int x\psi\,dx=\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n^2(n+2)}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+2)}=\frac{1}{4}[2\psi(1)]-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{3}{8}$$

Questi ultimi risultati ci danno il destro per stimare il valore di momenti superiori che portano alle seguenti somme

$$\int x^k\psi\,dx=\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+k}}{n^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+k+1}}{n^2(n+k+1)}$$

che, per $x=1$ danno

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+k+1)}$$

Per valutare tale somma scriviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n(n+k+1)}=\frac{1}{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k+1}\right)\right]=\frac{1}{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+k+1)}\right]$$
$$=\frac{1}{k+1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k+1}\right]\right)$$

l'ultima è una nota somma telescopica nella quale tutti gli addendi si elidono eccetto i primi k, per cui la serie si trasforma in una somma finita sui primi k+1 termini ed infine

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+k+1)}=\frac{\psi(1)}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2}\sum_{m=1}^{k+1}\frac{1}{m} \qquad [1.19]$$