14. Ai giardini

Due amici si danno un appuntamento imprecisato tra le 13 e le 14 ai giardini pubblici della città. Arrivano a caso ed in maniera non meglio concordata, e ciascuno aspetta esattamente 15 minuti: qual è la probabilità che essi si incontrano effettivamente?

Apparentemente la risposta è 0,5 in quanto ciascuno aspetta 15 minuti, quindi in tutto 30, che è esattamente la metà di un'ora. Ma non è così, come si vede dal fatto che gli accadimenti sono sì indipendenti, ma hanno anche un'area di sovrapposizione, per cui la probabilità totale è minore della somma delle permanenze singole.

Riformuliamo il problema come segue: i due amici di danno un appuntamento per un lasso di tempo unitario (1 ora); ciascuno aspetta una frazione $\alpha>0$ di ora. Calcolare la probabilità che essi si incontrino.

Propongo due metodi di soluzione.

1. Se chiamo x l'istante in cui arriva la prima persona e y l'istante in cui arriva la seconda dobbiamo avere che devono verificarsi le quattro condizioni seguenti:

$$\begin{cases} x \le y \le x+\alpha \\ y \le x \le y+\alpha \\ 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \qquad [14.1]$$

Le disequazioni sono suscettibili di una semplice rappresentazione grafica: la terza e la quarta determinano un quadrato di lato unitario, la prima e la seconda due rette parallele tra loro e alla bisettrice $x=y$, determinando la fascia come in figura

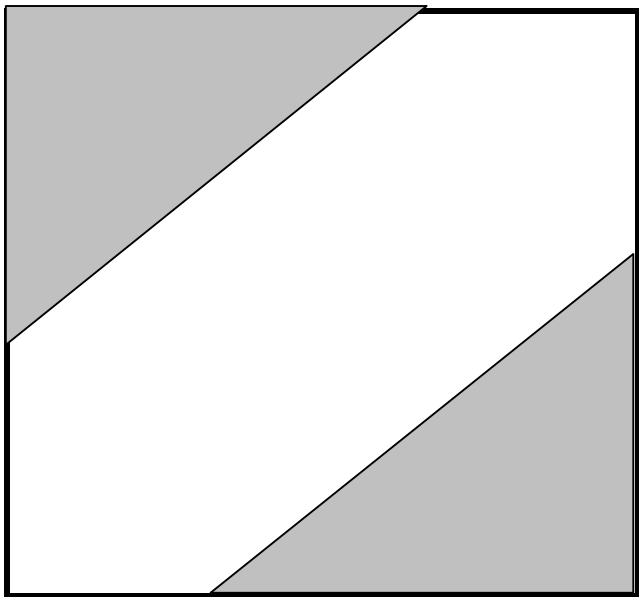

Fig. 1: La fascia di contemporaneità

Non resta quindi che calcolare l'area della fascia bianca. I due triangoli rettangoli isosceli hanno ciascun cateto uguale a $(1-\alpha)$ per cui è immediato calcolare la probabilità cercata come

$$P(\alpha)=1-(1-\alpha)^2=2\alpha-\alpha^2 \qquad [0\leq\alpha\leq1] \qquad [14.2]$$

In effetti l'andamento è parabolico

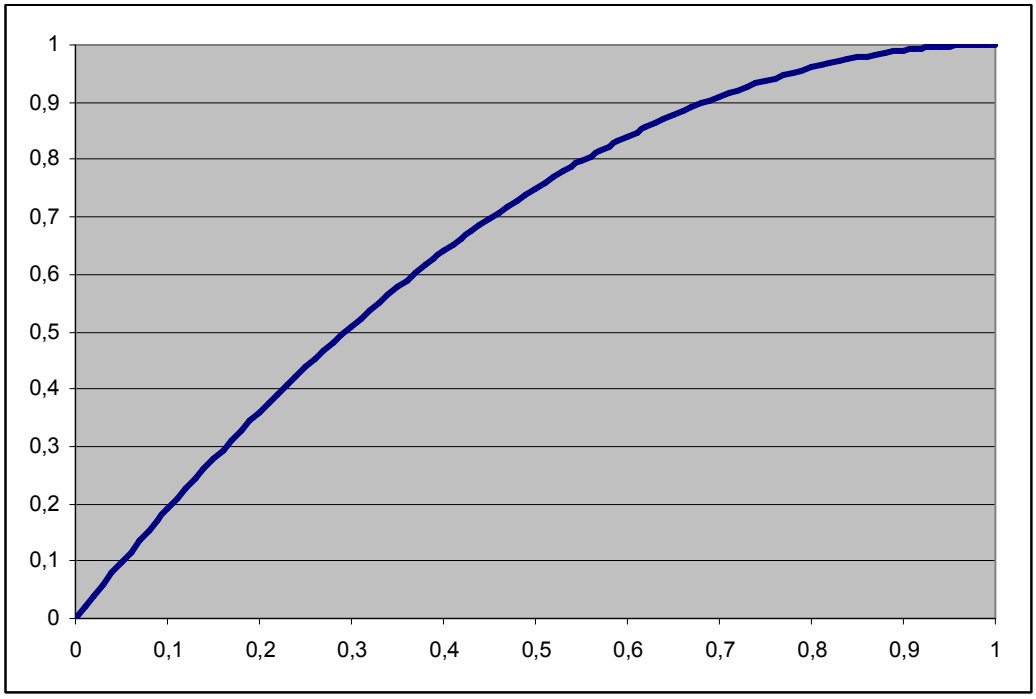

Fig.2: probabilità di incontro in funzione della frazione di ora di attesa

Se l'attesa è di 15' (1/4 d'ora) la probabilità è 7/16; se ciascuno attende 30' (mezz'ora) la probabilità 3/4. Se ciascuno ha la pazienza di attendere 17'34".41559 allora la probabilità è esattamente ½.

La struttura della [14.2] dice che alla somma delle permanenze ($\alpha+\alpha$) si deve sottrarre il loro prodotto, corrispondente al fatto che se le persone si incontrano c'è una fascia di sovrapposizione che va tolta

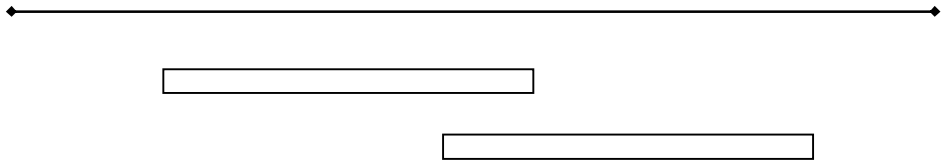

Fig.3: una permanenza che consente l'incontro

2. In effetti le due persone sono indistinguibili tra loro, possiamo quindi considerare il solo caso in cui $x \leq y$ allora occorre soltanto che sia anche $y \leq x+\alpha$. Allora avremo da considerare soltanto metà del quadrato unitario (figura 4) e la probabilità è il del rapporto tra l'area della fascia bianca e quella del triangolo; naturalmente si ottiene ancora la [14.2]

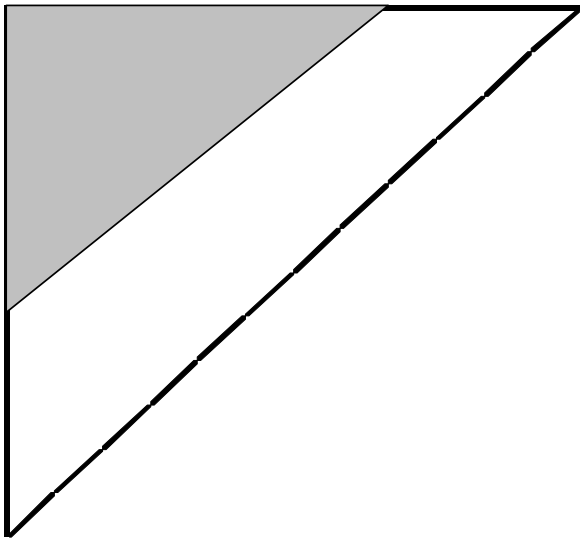

Fig.4: metà del problema

Lascio al lettore dimostrare, dovrei meglio dire "verificare", che se la prima persona attende per una frazione α di ora e la seconda per una frazione β, allora la probabilità di incontro è

$$P(\alpha, \beta)= (\alpha+\beta)-(\alpha^2+\beta^2)/2 \qquad [14.3]$$

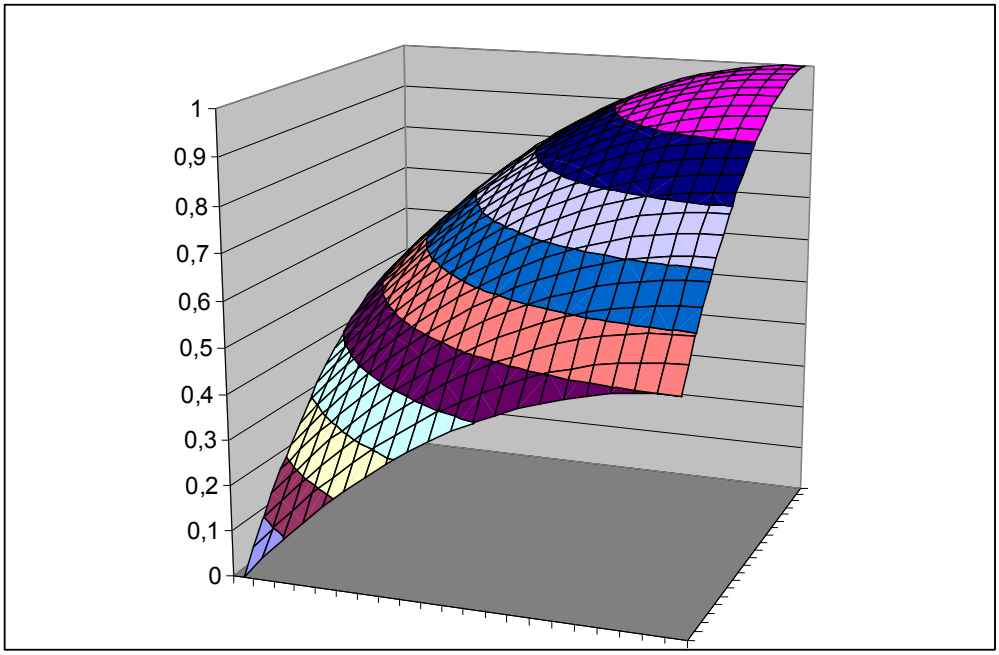

Fig.5: la calotta sferica per due attese diverse

E se le persone fossero tre, e ciascuna aspetta una frazione α di ora?

Il sistema analitico risolvente è simile a [14.1], ove si aggiunga un termine z che rappresenta l'istante in cui arriva la terza persona. L'interpretazione geometrica è più complessa, ed è inestensibile al caso di 4 o più persone.

Ragioniamo allora in maniera diversa. Se vi sono n persone (fig. 6 per n=4), la probabilità $P_n(\alpha)$ che esse si incontrino tutte contemporaneamente è data dalla somma di due termini.

Per induzione, ripartendo da n=2 abbiamo che

$$P_2(\alpha) = 2\alpha - \alpha^2$$

aggiungendo una terza persona abbiamo che vi sono 3 volte il prodotto delle permanenze di due persone diminuita di due volte il prodotto delle permanenze di tutte e tre

$$P_3(\alpha) = 3\alpha^2 - 2\alpha^3$$

e la strada è trovata con una semplice generalizzazione: la probabilità dell'incontro di n persone è n volte il prodotto delle permanenze di (n-1) persone diminuita di (n-1) volte il prodotto di tutte le permanenze

$$P_n(\alpha) = n\alpha^{n-1} - (n-1)\alpha^n \qquad [14.4]$$

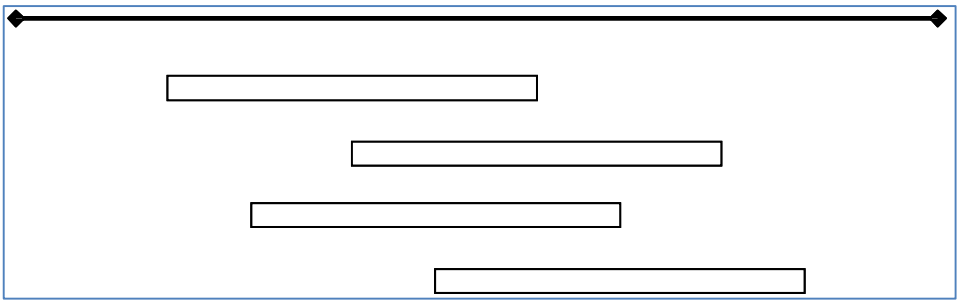

Fig.6: una permanenza che consente l'incontro di 4 persone

In fig.7 è mostrato l'andamento di P al variare di n ed α.

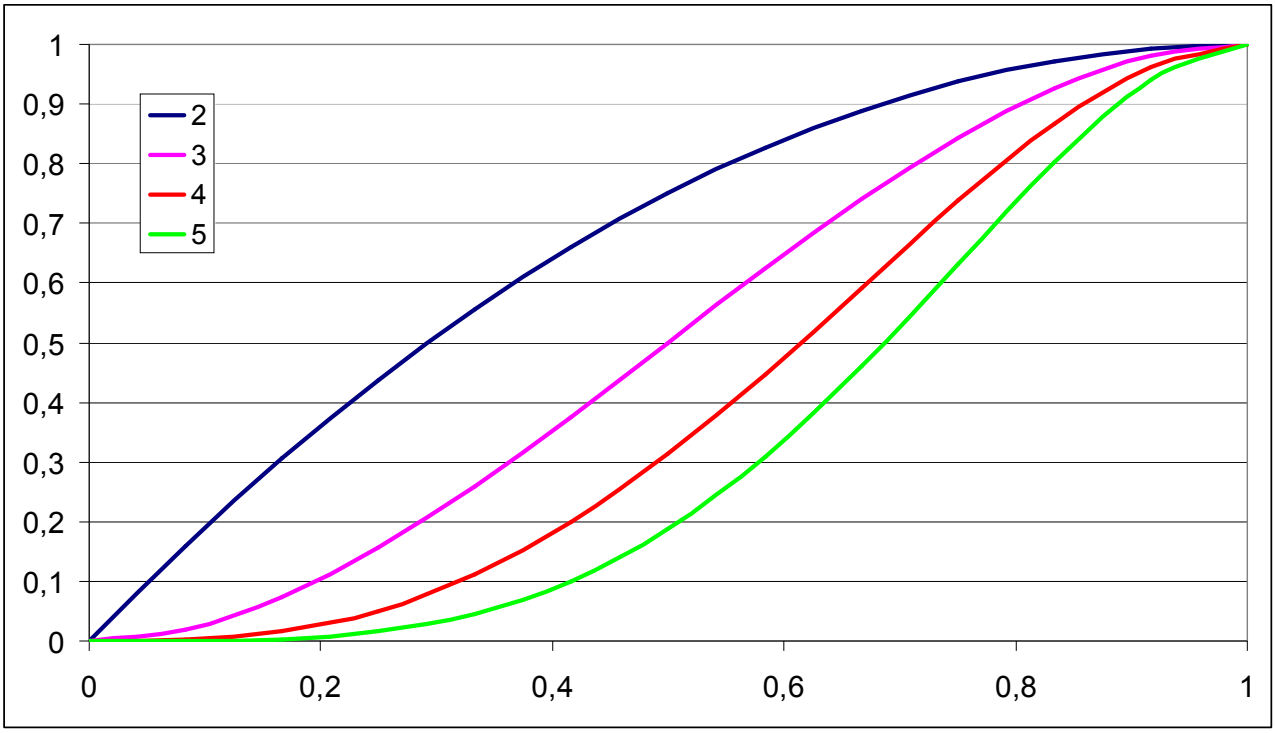

Fig. 7: andamento di P_n (n=2, 3, 4, 5)

Viene raggiunta la probabilità ½ per valori sempre maggiori di α al crescere di *n*:

n	α
2	0,29289322
3	0,36602517
4	0,61427243
5	0,68618982
6	0,73555001
…	
$n \to \infty$	$1-1{,}68/n$

Se ciascuna delle *n* persone permane per una frazione α_i di tempo, la probabilità che esse siano contemporaneamente presenti è

$$P(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{n-1} - \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{n} \qquad [14.5]$$