30. Pescatori

Un problema, una cui soluzione stupenda è dovuta nientemeno che a Dirac, chiede di trovare il numero di pesci che costituiscono il frutto di una giornata di lavoro di tre pescatori onesti ed equanimi. I tre soci, stanchi per il lungo lavoro, decidono di rimandare la spartizione del bottino al giorno successivo e pertanto vanno a dormire. Durante la nottata Andrea, il primo dei tre, si sveglia, osserva il pescato e decide di alleviare il lavoro di spartizione facendo da solo: conta il numero di pesci e osserva che non è divisibile per tre, visto che ne avanza uno; decide pertanto di ributtare un pesce a mare, del rimanente prende per sé un terzo, ossia la sua giusta parte, vede che ciò che resta è divisibile per due e quindi mette via la sua parte, certo che gli altri due divideranno tra loro quanto resta, così che ciascuno avrà esattamente lo stesso numero di pesci. Poi torna a dormire. Poco più tardi si sveglia anche Bartolomeo che, ignaro di quanto fatto da Andrea, decide di agire nella maniera giusta: conta i pesci, realizza che la quantità non è divisibile per tre, ne getta uno in mare, di ciò che resta prende un terzo e lo mette via e osserva che quanto rimane è divisibile per due e va a dormire. Prima dell'alba si sveglia anche Carmelo, che procede allo stesso modo. Quanti sono i pesci pescati originariamente?

Per formalizzare il tutto chiamiamo x il numero iniziale di pesci. Andrea vede che il numero di pesci è divisibile per tre solo togliendone uno, quindi

$$x = 3k + 1 \qquad [30.1]$$

Andrea rimuove la quantità k e resta $2k$. Quando si sveglia Bartolomeo, egli trova, su tale quantità, la stessa situazione [30.1] per cui

$$2k = 3t + 1 \qquad [30.2]$$

egli rimuove la quantità t e resta $2t$. Quando si sveglia Carmelo, egli trova, su tale quantità, la stessa situazione [30.2] per cui

$$2t = 3u + 1 \qquad [30.3]$$

A ritroso, quindi

$$t = \frac{3u+1}{2}$$

$$2k = \frac{9u+3}{2} + 1 = \frac{9u+5}{2} \qquad k = \frac{9u+5}{4}$$

$$x = \frac{27u+15}{4} + 1 = \frac{27u+19}{4} = 6u + 4 + \frac{3(u+1)}{4}$$

che è intero se u=4n-1, quindi

$$x = 6(4n-1)+4+3n = 27n-2 \qquad x \equiv -2 \pmod{27} \qquad [30.4]$$

Come c'era da aspettarci vi sono infinite soluzioni. La più piccola è 25: Andrea getta a mare un pesce e ne restano 24, ne prende 8 ovvero un terzo e ne lascia 16. Bartolomeo li trova, ne getta via uno e prende un terzo dei 15 restanti ossia 5; dei 10 rimanenti Carmelo, toltone uno, prende per sé un terzo ovvero 3 e ne lascia 6. Che sorpresa, quando si sveglieranno e avremo Andrea con 8 pesci, Bartolomeo con 5 e Carmelo con 3 e un avanzo di 6. Essendo tutti onesti ed equanimi avranno difficoltà, perché hanno 8+5+3+6=22 pesci, che non riescono a dividere per tre: ne getteranno ancora uno in mare e ne riceveranno 7 ciascuno, avendo sperperato ben 4 pesci! La troppa onestà disorganizzata può far danni a tutti.

La sequenza delle soluzioni è {25, 52, 79, 106, 133, …}.

A questa appartengono dei quadrati perfetti, ovvero {25, 484, 1024, 2401, 3481, 5776, 7396, 10609, 12769, 16900, 19600, …} corrispondenti a n=1, 18, 38, 89, 129, 214, 274, 393, 473, … tra i quali generatori vi sono a loro volta dei quadrati come 1 e $2601=51^2$.

Certo il numero 3 è affascinante, la situazione non cambia nella sostanza se invece di un pesce i tre amici si trovassero a doverne gettare 2, la soluzione si trova in maniera analoga e risulta essere

$$x \equiv -4 \pmod{27}$$

Se invece i pescatori fossero 4 e vigessero le stesse ipotesi? La catena di equazioni diviene

$$x = 4k+1$$

con

$$3k = 4t+1$$

poi

$$3t = 4u+1$$

con

$$3u = 4z+1$$

A ritroso

$$u = \frac{4z+1}{3}$$

$$t=\frac{4u+1}{3}=\frac{16z+7}{9}$$

$$k=\frac{4t+1}{3}=\frac{64z+37}{27}$$

$$x=4k+1=\frac{256z+148}{27}+1=\frac{256z+175}{27}=9z+6+\frac{13(z+1)}{27}$$

che è intero se z=27n-1, quindi

$$x=9(27n-1)+6+13n=256n-3 \qquad x\equiv -3 \pmod{256} \qquad [30.5]$$

Quindi con un minimo di 253 pesci abbiamo, gettatone via 1 che il primo pescatore ne prende un quarto ossia 63, lasciandone 189 nel mucchio che il secondo porta a 188, di cui prende 47 lasciandone 141, che diventano 140 per un'ulteriore quota di 35 per un resto di 105, che diventa 104 ed un'ultima quota di 26. Restano 78 pesci, divisibili per 3 inutili quote da 26. Naturalmente non vi sono quadrati perfetti.

Con 250 pesci si devono sottrarre 2 per volta per rendere il mucchio divisibile per 4 e così via; con 246 occorre gettarne ad ogni turno ben 3 (che peccato!).

Se poi i pescatori fossero 5, nelle stesse condizioni avremmo la soluzione

$$x=3125n-4 \qquad x\equiv -4 \pmod{3125} \qquad [30.6]$$

Le divisioni successive per il numero di pescatori introducono lo stesso fattore al denominatore; se chiamiamo x_k la soluzione generale se k è il numero di pescatori allora è

$$x_k=nk^k-(k-1) \qquad x_k\equiv -k+1 \pmod{k^k}$$

ed il problema è universalmente risolto.

Abbiamo visto che resta sempre una certa quantità di pesce dopo il prelievo dell'ultimo pescatore rispettivamente 6, 78, 1020, 15620, 279930, … pari rispettivamente alla frazione del totale 0,24; 0,3083; 0,3268…; 0,33482…; 0,3399…; 0,3436… al crescere di k la frazione di pesci che rimane tende al valore e^{-1}.

In effetti ciascun pescatore preleva una quantità inferiore di pesci rispetto a colui che lo ha preceduto; infatti se vi sono k individui, il primo preleva circa $1/k$;

il secondo preleva circa $\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\dfrac{1}{k}=\dfrac{k-1}{k^2}$;

il terzo preleva circa $\left(1-\dfrac{k-1}{k^2}\right)\dfrac{1}{k}=\dfrac{k^2-k+1}{k^3}$;

il quarto preleva circa $\left(1-\dfrac{k^2-k+1}{k^3}\right)\dfrac{1}{k}=\dfrac{k^3-k^2+k-1}{k^4}$;

…

l'ultimo preleva circa $\dfrac{k^{k-1}-k^{k-2}\pm\ldots\mp1}{k^k}$

Ciascuno preleva meno dell'altro, in un rapporto che vale circa

$$\frac{k^{k-2}-k^{k-3}\pm\ldots\mp1}{k^{k-1}}:\frac{k^{k-1}-k^{k-2}\pm\ldots\mp1}{k^k}=k\frac{k^{k-2}-k^{k-3}\pm\ldots\mp1}{k^{k-1}-k^{k-2}\pm\ldots\mp1}\approx1+\frac{1}{k-1}$$

Ah, sapete come rispose istantaneamente Dirac al problema dei tre pescatori con il pesce che avanza? -2, che pur essendo impratica è l'unica soluzione stabile: infatti il primo pescatore getta in mare 1 pesce ed il mucchio diventa di -3; egli ne prende per sé -1 che sottrae ai -3 e ne restano -2, così che il secondo pescatore trova lo stesso mucchio del primo e così via.

Lascio a voi i commenti.