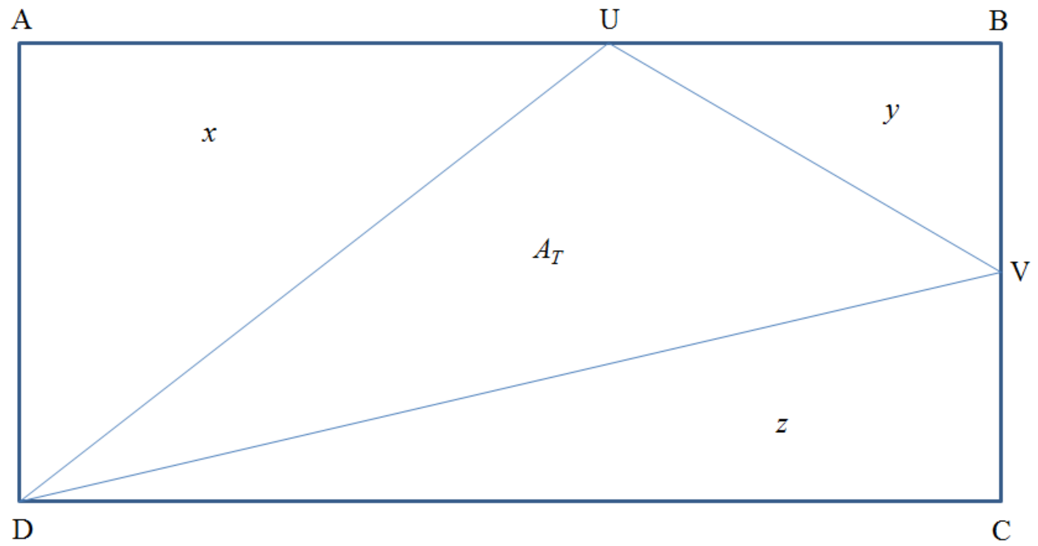
20. Chi troppo vuole ….

Il problema non è difficile, ma le soluzioni sono interessanti. Sia dato un rettangolo e su due lati contigui siano individuati due punti; si congiunga il vertice opposto a quello contenente i due lati contigui con i suddetti due punti: saranno così definiti quattro triangoli di area x, y, z e A_T. I termini si chiariscono dalla figura



I termini del problema

Facciamo le seguenti posizioni:

AB=b CB=h

AU=b_1 CV=h_1

$A=bh$ è l'area del rettangolo

I dati del problema generano le seguenti equazioni

$$\begin{cases} hb_1 = 2x \\ bh_1 = 2z \\ (b-b_1)(h-h_1) = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} hb_1 = 2x \\ bh_1 = 2z \\ bh - 2z - 2x - 2y + b_1h_1 = 0 \end{cases}$$

Il prodotto delle prime due equazioni dà bhh_1b_1=4xz che, sostituito nell'ultima del sistema fornisce

$$bh - 2(x + y + z) + \frac{4xz}{bh} = 0$$

da cui la risolvente

$$A^2 - 2(x + y + z)A + 4xz = 0 \qquad [20.1]$$

$$A = (x + y + z) + \sqrt{(x + y + z)^2 - 4xz}$$

avendo considerato l'unica soluzione geometricamente ammissibile.

Il problema è risolto da

$$A_T = A - (x + y + z) = \sqrt{(x + y + z)^2 - 4xz} \qquad [20.2]$$

Se ad esempio x=3, y=4, z=5 allora A_T =2√21.

Embè? Tutto qui? Certo che no.

Osserviamo che la soluzione è invariante rispetto allo scambio tra x e z, mentre y giuoca un ruolo differente, dato che si trova nel vertice individuato dai punti di stacco U e V. È interessante vedere quali sono le condizioni a che la terna (x, y, z) risolvente fornisca per il triangolo DUV una superficie espressa da un numero intero. Naturalmente siamo interessati a soluzioni primitive, ovvero quelle per le quali MCD(x, y, z)=1.

Innanzitutto la più piccola tra tutte è (2, 1, 2) per la quale A=8 e A_T=3. Diamo ora un'occhiata a casi semplici:

i. I tre numeri sono consecutivi (x, x+1, x+2) – la sequenza per x è

x:{2, 7, 20, 54, 143, 376, 986, 2583, 6764, 17710, 46367, 121392, 317810, …}

il limite asintotico del rapporto tra due termini consecutivi è il quadrato della sezione aurea: Φ^2.

ii. I tre numeri sono consecutivi (x, x-1, x+1) – la sequenza per x è costituita da quadrati perfetti

x:{4, 25, 169, 1156, 7921, 54289, 372100, 255040t9, …}

il limite asintotico del rapporto tra due termini consecutivi è 3Φ+2. L'area A_T è un numero di Fibonacci

$$A_T = \sqrt{5x_t^2 - 4x_t} = F_{4t+2}$$

iii. Area del triangolo A_T pari a un quadrato perfetto:

A_T =4 → (3, 1, 4)

A_T =9 → (2, 4, 5); (4, 2, 9); (7, 2, 10); (8, 1, 14); (9, 2, 10); (14, 1, 18) …

A_T =16 → (3, 5, 12); (4, 7, 9); (5, 3, 16); (7, 4, 15); (11, 5, 12); (13, 3, 20) …

…

iv. Area del triangolo A_T pari a un quadrato perfetto e con x=z:

A_T =9 → (20, 1, 20);

A_T =16 → (15, 4, 15);

A_T =25 → (156, 1, 156);

A_T =64 → (255, 4, 255);

A_T =144 → (65, 64, 65);

…

v. Le tre aree differiscono di una unità:

(2, 1, 2); (10, 9, 10); (65, 64, 65), (442, 441, 442); (3026, 3025, 3026); …

(3, 4, 3); (24, 25, 24); (168, 169, 168); (1155, 1156, 1155), …

(2, 2, 3); (15, 15, 16); (104, 104, 105); (714, 714, 715), …

(6, 6, 5); (40, 40, 39); (273, 273, 272); (1870, 1870, 1870), …

Il primo caso è del tipo (a^2+1, a^2, a^2+1) allora

$$A_T = \sqrt{5a^4 + 4a^2}$$

che è sempre un numero di Fibonacci se a sua volta *a* è un numero di Fibonacci di indice pari:

$$A_T = \sqrt{5F_{2n}{}^4 + 4F_{2n}{}^2} = F_{4n} \qquad [20.3]$$

Il secondo caso è del tipo (a^2-1, a^2, a^2-1) allora

$$A_T = \sqrt{5a^4 - 4a^2}$$

che è sempre un numero di Fibonacci se a sua volta *a* è un numero di Fibonacci di indice dispari:

$$A_T = \sqrt{5F_{2n+1}{}^4 - 4F_{2n+1}{}^2} = F_{4n+2} \qquad [20.4]$$

vi. Un'area è la somma delle altre due, il che si può ottenere in due modi:
a. (x, y, $x+y$)

come (3, 1, 4); (5, 4, 9); (7, 9, 16); (8, 1, 9) …

almeno una delle aree è a sua volta un quadrato, anche l'area del triangolo può essere in questo caso un quadrato, ma solo pari come per

A_T=4 → (3, 1, 4)

A_T=16 → (63, 1, 64)

A_T=36 → (323, 1, 324); (77, 4,81);

A_T=144 → (17, 64, 81);

b. (x, $x+z$, z)

come (3, 8, 5); (5, 21, 16); (7, 15, 8); (7, 49, 33)

vii. Due triangoli hanno area uguale e il terzo aumentata di una unità: (x, x, x+1)

(2, 2, 3); (15, 15, 16); (104, 104, 105); (714, 714, 715); (4895, 4895, 4896); …

In questo caso l'area del triangolo è un numero di Fibonacci di ordine dispari:

$$A_T = \sqrt{5x_t^{\,2} + 2x_t + 1} = F_{4t+1}$$

e il limite del rapporto x_{t+1}/x_t=3Φ+2, infatti è $x_t = F_{2t} \cdot F_{2t+1}$.

viii. Analogamente, due triangoli hanno area uguale e il terzo diminuita di uno: (x, x, x-1)

(6, 6, 5); (40, 40, 39); (273, 273, 272); (1870, 1870, 1869); (12816, 12816, 12815); …

Anche in questo caso l'area del triangolo è un numero di Fibonacci di ordine dispari:

$$A_T = \sqrt{5x_t^{\,2} - 2x_t + 1} = F_{4t-1}$$

e il limite del rapporto x_{t+1}/x_t=3Φ+2, infatti è $x_t = F_{2t+1} \cdot F_{2t+2}$.

Parlando di triangoli non possiamo certo infine omettere un omaggio a Pitagora e imporre quindi che valga la ben relazione generatrice per esprime l'area dei tre triangoli in questione, ciò riduce ovviamente il problema a due parametri (t, u) con alto grado di simmetria

$$A_T = \sqrt{(2ut + u^2 - t^2 + u^2 + t^2)^2 - 8ut(u^2 + t^2)} = 2\sqrt{u^4 - t^2u^2 + t^4} = 2\sqrt{u^4 - t^2u^2 + t^4} \qquad [20.5]$$

Come sempre siamo interessati a soluzioni primitive, ovvero prime tra loro; escludiamo quindi la soluzione banale $A_T(z,z) = 2z^2$. Eulero (1782) asserisce che il problema è solubile, ma Pocklington (1912) dimostra che non lo è a meno che non sia appunto t=u.

I numeri x, y, z possono essere in progressione aritmetica di ragione k, allora

$$A_T = \sqrt{5y^2 + 4k^2} \qquad y>k \qquad [20.6]$$

Le soluzioni primitive possono essere raggruppate secondo i valori crescenti della ragione k. Ad esempio

k=1 $-$ y:{3, 8, 21, 55, 144, 377, 987, ….}

k =11 $-$ y:{3, 7, 16, 24, 45, 65, 119, 171, 312, 448, 817, ….}

k =19 $-$ y:{8, 9, 33, 35, 91, 96, 240, 253, 629, 663, ….}

k =29 $-$ y:{11, 15, 48, 56, 133, 153, 351, 403, 920, ….}

tutte tali successioni godono della medesima proprietà: il rapporto limite tra un termine e quello che lo precede di due posizioni è pari a Φ+1.

La sequenza dei valori ammissibili per k è

k: {1, 11, 19, 29, 31, 41, 59, 61, 71, 79, 89, 101, 109, 121, 131, 139, 149, 151, 179, 181, 191, 199, 209, 211, 229, 239, 241, 251, 269, 271, 281, 311, 319, 331, 341, 349, 359, 361, 379, 389, 401, 409, 419, 421, 431, 439, 449, 451, 461, 479, 491, 499 ….}

Dato un valore di k esistono diversi valori di y che risolvono il problema. È vero il reciproco, ma con minore frequenza. Dato infatti un certo valore di y, dalla [20.6] abbiamo che

$$k^2 = \frac{t^2}{4} - \frac{5}{4} y^2$$

ed il valore massimo tra k e y^2 è proprio 5/4; un ulteriore punto di accumulazione per lo stesso rapporto è ¼. Quindi ad esempio per y=45 il valore massimo per k è 2531,25 ed in effetti abbiamo la soluzione

$$\sqrt{5 \cdot 45^2 + 4 \cdot 2531^2} = 5063$$

Nel caso di y= 21 abbiamo quattro soluzioni,

$$\sqrt{5 \cdot 21^2 + 4 \cdot 1^2} = 47 \, ; \, \sqrt{5 \cdot 21^2 + 4 \cdot 59^2} = 127 \, ;$$

$$\sqrt{5 \cdot 21^2 + 4 \cdot 109^2} = 223 \, ; \, \sqrt{5 \cdot 21^2 + 4 \cdot 551^2} = 21103$$

A partire dalla soluzione (3,11) abbiamo i concatenamenti seguenti

(3, 11), (11, 29), (29, 209), (209, 421)
(3, 11), (11, 29), (29, 209), (209, 61), (61, 929)

È chiaro che tra tutte queste soluzioni, solo quelle con k<y risolvono il problema iniziale.

I numeri x, y, z possono essere in progressione geometrica di ragione k, allora

$$A_T = x\sqrt{1+2k-k^2+2k^3+k^4}$$

che non è mai intero.

Data l'asimmetria di cui abbiamo parlato, possiamo porre y=1 e cercare le soluzioni intere per A_T che vale ora $\sqrt{(x+1+z)^2-4xz}$

Le prime soluzioni primitive sono (2, 1, 2) – (3, 1, 4) – (5, 1, 8) – (7, 1, 12) – (8, 1, 9) – (9, 1, 16) – (11, 1, 20) – (13, 1, 24) – (15, 1, 16) – (15, 1, 28) – (16, 1, 21) - (17, 1, 32) …

Esiste sempre la soluzione (t, 1, 2t-2), che non è sempre primitiva, e che dà $A_T = (t+1)$. Accanto ad essa vi sono soluzioni del tipo (u, 1, u+1) che danno valori interi quando $u+1=q^2$, per cui la soluzione ad un parametro è (q^2-1, 1, q^2) e $A_T = 2q$.

Per un generico valore y, la massima soluzione (non sempre primitiva) è [t, y, (y+1)t-(y+1)] per la quale $A_T = (ty+1)$.

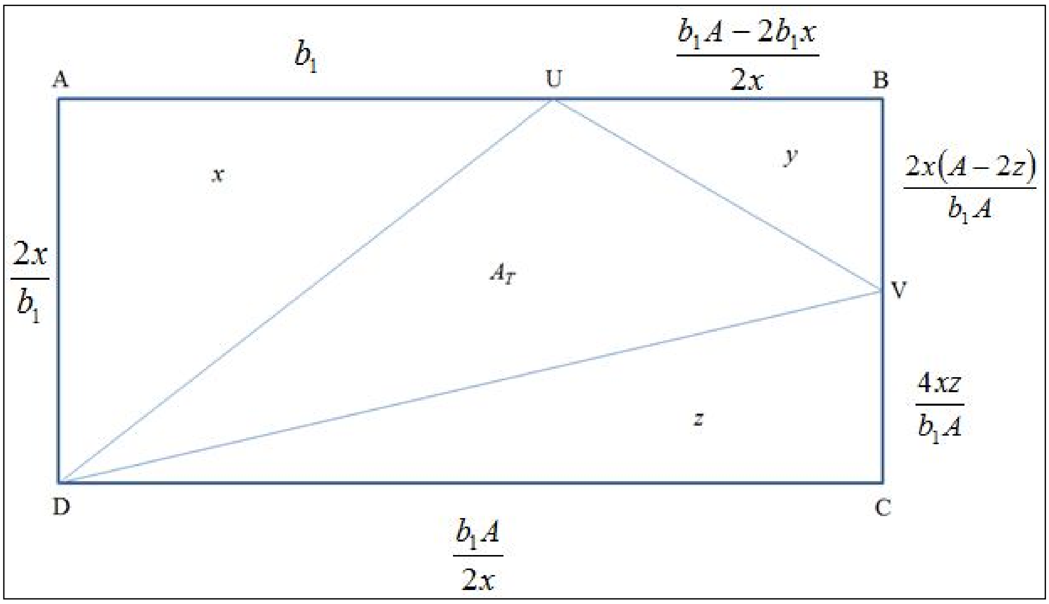
Avendo a disposizione una terna si possono trovare molte relazioni interessanti.

Ma torniamo al problema originale per risolverlo nella sua interezza. Con le stesse notazioni abbiamo le relazioni

$$\begin{cases} h = \dfrac{A}{b} \\ \dfrac{b_1 A}{b} = 2x \\ b\left(\dfrac{A}{b} - h_1\right) = 2z \\ h_1(b-b_1) = 2y \end{cases}$$

da cui $b = \dfrac{b_1 A}{2x}$; per cui da $A - bh_1 = 2z$ abbiamo $h_1 = \dfrac{2x(A-2z)}{b_1 A}$ con $h = \dfrac{2x}{b_1}$.

In figura mostro il rettangolo in cui sono evidenziate tutte le grandezze, ricondotte all'unica incognita b_1:



$h_1 / h = (A-2z)/A$

che è un invariante del problema; d'altro canto

$b_1 / b = 2x/A$

che è un altro invariante.

Il problema è indeterminato e ammette infinite soluzioni dipendenti da b_1.

Nel caso $x=3$, $y=4$, $z=5$, $A_T = 2\sqrt{21}$, $A = 12+2\sqrt{21}$ abbiamo ad esempio

$AD = 6/b_1$;

$DC = b_1 (6+\sqrt{21})/3$

$h_1 = 6(1+\sqrt{21})/ b_1(6+\sqrt{21})$

se poniamo $b_1=1$ allora $AD=6$; $DC= (6+\sqrt{21})/3$; $h_1= 2(\sqrt{21}-3)=3,165\ldots$

se poniamo $b_1=3$ allora $AD=2$; $DC= (6+\sqrt{21})$; $h_1=2(\sqrt{21}-3)/3=1,055\ldots$

Nel caso x=1, y=2, z=3, A_T=4, A=10 abbiamo

AD=2/b_1;

DC=5b_1

h_1= 2/(5b_1)