18. Cannocchiali

A ben guardare alcune serie, apparentemente ostiche, possono essere addomesticate se tutti i loro termini, ad eccezione di un numero finito di essi, si elidono l'un l'altro, dando quindi un contributo nullo: il loro nome, fascinoso ma che rende appropriatamente l'idea è serie telescopiche.

Vediamone qualche famiglia. Si parte con serie di frazioni il cui denominatore è il prodotto di due fattori lineari che includono un valore reale variabile x. Se sottintendiamo che la variabile n corre lungo gli interi positivi per semplicità di notazione possiamo scrivere che la famiglia è

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+nx)[1+(n+1)x]} \qquad [18.1]$$

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+nx)[1+(n+1)x]} = \frac{1}{x(1+x)}$$

A

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+n)(2+n)} = \frac{1}{2}$$
$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+2n)(3+2n)} = \frac{1}{6}$$
$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+3n)(4+3n)} = \frac{1}{12}$$
$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+4n)(5+4n)} = \frac{1}{20}$$
$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+5n)(6+5n)} = \frac{1}{30}$$
$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+kn)(1+k+kn)} = \frac{1}{k(k+1)}$$
$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{2}n)(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}n)} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

B

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+nx)[1+(n+2)x]} = \frac{2+3x}{2x(1+x)(1+2x)}$$
$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+n)(3+n)} = \frac{5}{12}$$
$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+2n)(5+2n)} = \frac{2}{15}$$
$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+3n)(7+3n)} = \frac{11}{168}$$

$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+4n)(9+4n)}=\frac{7}{180}$$
$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+\sqrt{2}n)(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}n)}=\frac{3\sqrt{2}+2}{10\sqrt{2}+12}$$

C

$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+nx)[1+(n+3)x]}=\frac{3+12x+11x^2}{3x(1+x)(1+2x)(1+3x)}$$
$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+n)(4+n)}=\frac{13}{36}$$
$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+2n)(7+2n)}=\frac{71}{630}$$
$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+3n)(10+3n)}=\frac{23}{420}$$

D

$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+nx)[1+(n+4)x]}=\frac{2(2+5x)(1+5x+5x^2)}{4x(1+x)(1+2x)(1+3x)}$$
$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+n)(5+n)}=\frac{77}{240}$$
$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+2n)(9+2n)}=\frac{31}{315}$$
$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+3n)(13+3n)}=\frac{1037}{21840}$$

X

$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+nx)[1+(n+5)x]}=\frac{5+60x+255x^2+450x^3+274x^4}{5x(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+5x)}$$
$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+nx)[1+(n+6)x]}=\frac{(2+7x)(3+42x+203x^2+392x^3+252x^4)}{6x(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+5x)}$$

….

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+nx)[1+(n+k)x]} = \frac{1}{x} - \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{1+mx}$$

La famiglia successiva è costituita da serie di frazioni il cui denominatore è il prodotto di tre fattori lineari che includono un valore reale variabile x.

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+2)x]} \qquad [18.2]$$

La scomposizione in fratti semplici del termine generico è

$$\frac{1}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+2)x]} = \frac{A}{1+nx} + \frac{B}{1+(n+1)x} + \frac{C}{1+(n+2)x} =$$
$$\frac{A[1+(2n+3)x+(n+1)(n+2)x^2] + B[1+(2n+2)x+n(n+2)x^2] + C[1+(2n+1)x+n(n+1)x^2]}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+2)x]}$$

donde, imponendo l'uguaglianza dei due numeratori abbiamo

$$\frac{2}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+2)x]} = \frac{n^2}{1+nx} - 2\frac{(n+1)^2}{1+(n+1)x} + \frac{(n+2)^2}{1+(n+2)x}$$

Sommando effettivamente i termini, a partire da n=1:

$$\frac{2}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+2)x]}=$$

$$\frac{1}{1+x}-2\frac{2^2}{1+2x}+\frac{3^2}{1+3x}$$

$$+\frac{2^2}{1+2x}-2\frac{3^2}{1+3x}+\frac{4^2}{1+4x}$$

$$+\frac{3^2}{1+3x}-2\frac{4^2}{1+4x}+\frac{5^2}{1+5x}$$

$$+\frac{4^2}{1+4x}-2\frac{5^2}{1+5x}+\frac{6^2}{1+6x}$$

$$+\frac{5^2}{1+5x}-2\frac{6^2}{1+6x}+\frac{7^2}{1+7x}$$

...

$$+\frac{n^2}{1+nx}-2\frac{(n+1)^2}{1+(n+1)x}+\frac{(n+2)^2}{1+(n+2)x}$$

$$+\frac{(n+1)^2}{1+(n+1)x}-2\frac{(n+2)^2}{1+(n+2)x}+\frac{(n+3)^2}{1+(n+3)x}$$

$$+\frac{(n+2)^2}{1+(n+2)x}-2\frac{(n+3)^2}{1+(n+3)x}+\frac{(n+4)^2}{1+(n+4)x}$$

Osserviamo che coppie di termini uguali compaiono con due segni positivi ed uno negativo doppio e si elidono, restano quindi

$$\frac{2}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+2)x]}=\frac{1}{1+x}-\frac{2^2}{1+2x}-\frac{(n+3)^2}{1+(n+3)x}+\frac{(n+4)^2}{1+(n+4)x}=$$

$$=\frac{1}{1+x}-\frac{2^2}{1+2x}+\frac{(n^2+7n+12)x+2n+7}{(n^2+7n+12)x^2+(2n+7)x+1}=\frac{1}{1+x}-\frac{2^2}{1+2x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x(1+x)(1+2x)}$$

avendo effettuato il passaggio al limite $n\to\infty$, per cui la somma della serie è

$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+2)x]}=\frac{1}{2x(x+1)(2x+1)} \qquad [18.3]$$

e, puntualmente,

$$\sum_{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{12}$$

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{60}$$

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)} = \frac{1}{168}$$

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)(4n+9)} = \frac{1}{360}$$

e così via.

Se invece è

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+3)x]} \tag{18.4}$$

allora la scomposizione in fratti semplici è

$$\frac{6}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+3)x]} = 2\frac{n^2}{1+nx} - 3\frac{(n+1)^2}{1+(n+1)x} + \frac{(n+3)^2}{1+(n+3)x}$$

Sommando i termini, a partire da n=1

$$\frac{6}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+3)x]}=$$

$$2\frac{1}{1+x}-3\frac{2^2}{1+2x}\qquad+\frac{4^2}{1+3x}$$

$$+2\frac{2^2}{1+2x}-3\frac{3^2}{1+3x}\qquad+\frac{5^2}{1+4x}$$

$$+2\frac{3^2}{1+3x}-3\frac{4^2}{1+4x}\qquad+\frac{6^2}{1+5x}$$

$$+2\frac{4^2}{1+4x}-3\frac{5^2}{1+5x}\qquad+\frac{7^2}{1+6x}$$

..

$$+2\frac{n^2}{1+nx}-3\frac{(n+1)^2}{1+(n+1)x}\qquad+\frac{(n+3)^2}{1+(n+3)x}$$

$$+2\frac{(n+1)^2}{1+(n+1)x}-3\frac{(n+2)^2}{1+(n+2)x}\qquad+\frac{(n+4)^2}{1+(n+4)x}$$

$$+2\frac{(n+2)^2}{1+(n+2)x}-3\frac{(n+3)^2}{1+(n+3)x}\qquad+\frac{(n+5)^2}{1+(n+5)x}$$

$$+2\frac{(n+3)^2}{1+(n+3)x}-3\frac{(n+4)^2}{1+(n+4)x}\qquad+\frac{(n+6)^2}{1+(n+6)x}$$

Terne di termini uguali compaiono con i coefficienti positivi +2 e +1 ed uno negativo -3 e si elidono, restano quindi

$$\frac{6}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+3)x]}=\frac{2}{1+x}-\frac{2^2}{1+2x}-\frac{3^2}{1+3x}$$

$$-2\frac{(n+4)^2}{1+(n+4)x}+\frac{(n+5)^2}{1+(n+5)x}+\frac{(n+6)^2}{1+(n+6)x}=\frac{2}{1+x}-\frac{2^2}{1+2x}-\frac{3^2}{1+3x}+\frac{3}{x}$$

avendo effettuato il consueto passaggio al limite $n\to\infty$. Alla fine

$$\sum_{\infty}\frac{1}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+3)x]}=\frac{7x+3}{6x(1+x)(1+2x)(1+3x)}$$

cioè

$$\sum_{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+4)}=\frac{5}{12}$$

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+7)} = \frac{17}{210}$$

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+10)} = \frac{1}{35}$$

Ma possiamo anche avere

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+nx)[1+(n+2)x][1+(n+5)x]} \qquad [18.5]$$

allora la scomposizione in fratti semplici è

$$\frac{30}{(1+nx)[1+(n+2)x][1+(n+5)x]} = 3\frac{n^2}{1+nx} - 5\frac{(n+2)^2}{1+(n+1)x} + 2\frac{(n+5)^2}{1+(n+5)x}$$

Avremo anche qui i termini che si elidono, eccetto i primi e gli ultimi, per cui, al limite

$$\frac{1}{(1+nx)[1+(n+2)x][1+(n+5)x]} = \frac{1}{10(x+1)} + \frac{2}{5(2x+1)} - \frac{3}{5(3x+1)} - \frac{16}{15(4x+1)} - \frac{5}{3(5x+1)} + \frac{1}{2x}$$

Quindi

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+nx)[1+(n+2)x][1+(n+5)x]} = \frac{352x^3 + 405x^2 + 140x + 15}{30x(x+1)(2x+1)(3x+1)(4x+1)(5x+1)}$$

Il meccanismo appare chiaro e quindi osiamo scrivere che, posto $q \geq p$,

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+nx)[1+(n+p)x][1+(n+q)x]} =$$
$$\sum_{\infty} \left\{ \frac{n^2}{pq(1+nx)} - \frac{(n+p)^2}{(pq-p^2)[1+(n+p)x]} + \frac{(n+q)^2}{(q^2-pq)[1+(n+q)x]} \right\}$$

In virtù della ipotesi, avremo che $q=p+k$. Lo schema di somma esplicita è

$$\frac{1}{p(p+k)(1+x)}-\frac{(1+p)^2}{kp[1+(1+p)x]}+\frac{(1+p+k)^2}{k(p+k)[1+(1+p+k)x]}$$

$$+\frac{2^2}{p(p+k)(1+2x)}-\frac{(2+p)^2}{kp[1+(2+p)x]}+\frac{(2+p+k)^2}{k(p+k)[1+(2+p+k)x]}$$

$$+\frac{3^2}{p(p+k)(1+3x)}-\frac{(3+p)^2}{kp[1+(3+p)x]}+\frac{(3+p+k)^2}{k(p+k)[1+(3+p+k)x]}$$

....

Dobbiamo immaginare p fisso e k variabile allora ci sarà, alla riga m:

$$+\frac{m^2}{p(p+k)(1+mx)}-\frac{(m+p)^2}{kp[1+(m+p)x]}+\frac{(m+p+k)^2}{k(p+k)[1+(m+p+k)x]}$$

mentre alla riga $s>m$:

$$+\frac{s^2}{p(p+k)(1+sx)}-\frac{(s+p)^2}{kp[1+(s+p)x]}+\frac{(s+p+k)^2}{k(p+k)[1+(s+p+k)x]}$$

e alla riga $t>s$:

$$+\frac{t^2}{p(p+k)(1+tx)}-\frac{(t+p)^2}{kp[1+(t+p)x]}+\frac{(t+p+k)^2}{k(p+k)[1+(t+p+k)x]}$$

e avremo che il terzo termine della riga m si elide con il secondo della riga s e con il primo della riga t perché

$$\frac{(m+p+k)^2}{k(p+k)[1+(m+p+k)x]}-\frac{(s+p)^2}{kp[1+(s+p)x]}+\frac{t^2}{p(p+k)(1+tx)}=0$$

che è una condizione tra t ed s dati p, k, m.

Non ci è ora difficile comprendere come calcolare una somma in cui compaiono quattro fattori, ad esempio

$$\sum_{\infty} \frac{6}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+2)x][1+(n+3)x]} =$$
$$\sum \left\{ -\frac{n^3}{(1+nx)} + 3\frac{(n+1)^3}{[1+(n+1)x]} - 3\frac{(n+2)^3}{[1+(n+2)x]} + \frac{(n+3)^3}{[1+(n+3)x]} \right\}$$

L'elisione dei vari termini porta a

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+2)x][1+(n+3)x]} = \frac{1}{3x(x+1)(2x+1)(3x+1)}$$

Mentre, impiegando solo numeri primi,

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+nx)[1+(n+2)x][1+(n+3)x][1+(n+5)x]} = \frac{37x^2+30x+5}{15x(x+1)(2x+1)(3x+1)(4x+1)(5x+1)}$$

o i quadrati,

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(1+nx)[1+(n+1)x][1+(n+4)x][1+(n+9)x]} =$$
$$\frac{80574x^6+107010x^5+56330x^4+15135x^3+2201x^2+165x+5}{15x(x+1)(2x+1)(3x+1)(4x+1)(5x+1)(6x+1)(7x+1)(8x+1)(9x+1)}$$

con uno schema abbastanza chiaro per i fattori al denominatore.

Nell'ultima, posto x=1 otteniamo

$$\sum_{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+5)(n+10)} = \frac{4357}{907200}$$

niente male!

Considerazioni finali: il metodo esposto consente di sommare qualsiasi serie avente termini razionali il cui denominatore è il prodotto di fattori lineari nell'indice di sommatoria, come ad esempio

$$\sum_{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+3)(n+4)} = \sum_{\infty} \left\{ \frac{n^3}{6(n+1)} - \frac{n(n+2)^2}{2(n+3)} + \frac{n(n+3)^2}{3(n+4)} \right\}$$

Basta partire dalla serie, di tipo già visto, avente per termine generale

$$\frac{n}{(1+nx)[1+(n+2)x][1+(n+3)x]}$$

e porre infine x=1:

$$\sum_{\infty} \frac{n}{(1+nx)[1+(n+2)x][1+(n+3)x]} = \frac{1}{6(x+1)} + \frac{4}{3(2x+1)} - \frac{1}{3x} = \frac{6x^2+3x-2}{6x(x+1)(2x+1)}$$

da cui

$$\sum_{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+3)(n+4)} = \frac{7}{36}$$