16. Ricominciamo dalla fine

Torniamo a zeta, abbiamo da due secoli e mezzo che

$$\zeta(2n) = \prod_p \frac{p^{2n}}{(p^n - 1)(p^n + 1)} \qquad [16.1]$$

quindi, se

$$mr = ns \qquad [16.2]$$

allora

$$\frac{\zeta^m(2r)}{\zeta^n(2s)} = \prod_p \frac{p^{2mr}(p^s - 1)^n (p^s + 1)^n}{p^{2ns}(p^r - 1)^m (p^r + 1)^m} = \prod_p \frac{(p^s - 1)^n (p^s + 1)^n}{(p^r - 1)^m (p^r + 1)^m} \qquad [16.3]$$

è un numero razionale.

Per la [16.2] le espressioni [16.3] sono a tre parametri indipendenti m, r, n, mr/n, ossia

$$q\left(m, r, n; \frac{mr}{n}\right) = \prod_p \frac{(p^s - 1)^n (p^s + 1)^n}{(p^r - 1)^m (p^r + 1)^m} = \frac{\zeta^m(2r)}{\zeta^n(2s)} \qquad [16.4]$$

quindi, tabulando,

$$q(1,2,2;1) = \prod_p \frac{(p-1)^2 (p+1)^2}{(p^2 - 1)(p^2 + 1)} = \prod_p \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} = \frac{2}{5}$$

$$q(1,3,3;1) = \prod_p \frac{(p-1)^3 (p+1)^3}{(p^3 - 1)(p^3 + 1)} = \prod_p \frac{p^4 - 2p^2 + 1}{p^4 + p^2 + 1} = \frac{8}{35}$$

$$q(1,4,2;2) = \prod_p \frac{(p^2 - 1)^2 (p^2 + 1)^2}{(p^4 - 1)(p^4 + 1)} = \prod_p \frac{p^4 - 1}{p^4 + 1} = \frac{6}{7}$$

$$q(1,4,4;1) = \prod_p \frac{(p-1)^4 (p+1)^4}{(p^4 - 1)(p^4 + 1)} = \prod_p \frac{p^6 - 3p^4 + 3p^2 - 1}{p^6 + p^4 + p^2 + 1} = \frac{24}{175}$$

$$q(1,5,5;1)=\prod_p \frac{(p-1)^5(p+1)^5}{(p^5-1)(p^5+1)}=\prod_p \frac{p^8-4p^6+6p^4-4p^2+1}{p^8+p^6+p^4+p^2+1}=\frac{32}{385}$$

$$q(1,6,2;3)=\prod_p \frac{(p^3-1)^2(p^3+1)^2}{(p^6-1)(p^6+1)}=\prod_p \frac{p^6-1}{p^6+1}=\frac{691}{715}$$

$$q(1,6,3;2)=\prod_p \frac{(p^2-1)^3(p^2+1)^3}{(p^6-1)(p^6+1)}=\prod_p \frac{p^8-2p^4-1}{p^8+p^4+1}=\frac{5528}{7007}$$

$$q(2,9,9;2)=\prod_p \frac{(p^2-1)^9(p^2+1)^9}{(p^9-1)^2(p^9+1)^2}=\prod_p \frac{p^{32}+2p^{30}+....-2p^2-1}{p^{32}+2p^{30}+....+2p^2+1}=\frac{123156076096000}{250995167351929}$$

Si pone ora una questione: dato un qualsiasi numero razionale s compreso tra 0 ed 1, esiste una terna (m,r,n) per la quale $q\left(m,r,n;\frac{mr}{n}\right)=s$? Ad esempio l'equazione $q\left(m,r,n;\frac{mr}{n}\right)=\frac{1}{2}$ ha soluzione? Quante, in caso affermativo?

Dal momenti che i numeri razionali sono numerabili in qualsiasi intervallo e quindi anche in]0,1] mentre la [16.4] fornisce un numero di razionali dell'ordine di ∞^3, possiamo dire che ogni numero razionale è un punto di accumulazione per la funzione q descritta.

Consideriamo il valore q=1/2. Abbiamo il già visto

$$q(2,9,9;2)=\frac{123156076096000}{250995167351929}\approx 0{,}490671105$$

$$q(4,8,8;4)=\prod_p \frac{p^{32}-4p^{24}+6p^{16}-4p^8+1}{p^{32}+4p^{24}+6p^{16}+4p^8+1}=\frac{1296}{2401}\approx 0{,}539775094$$

ma è

$$q(4,170,170;4)=\approx 0{,}5007...$$

ora possiamo stabilire la sequenza di razionali

$$q(2t,2u,2u;2t) \qquad [16.5]$$

e trovare i valori di *u* in funzione delle *t* crescenti che meglio approssimano la frazione ½; l'approssimazione migliora con l'aumentare di *t*, *u*, come abbiamo visto. I primi termini sono

$$q(1,2,2;1) = \frac{2}{5},$$
$$q(2,9,9;2) = \frac{123156076096000}{250995167351929},$$

$$q(4,170,170;4) = \frac{11004073278219034071[1797\ \mathit{cifre}]62992305126768640000}{21977226860753740114[1797\ \mathit{cifre}]58926641423474028441}$$

I numeri diventano rapidamente insostenibili, per cui scrivo solo la sequenza di 2*u*:

2, 9, 170, 2260 a; 45360 a; 726600 a; ….

a partire dal quarto termine i valori sono approssimati.

Consideriamo q=3/4, allora

$$q(1,3,3;1) = \frac{8}{35},$$

$$q(2,4,4;2) = \frac{36}{49},$$

$$q(3,17,17;3) = \frac{158196976095609080276260611488998579713 9}{2119065826713384996368296165486460318125}$$

solo con gli indici:

3, 4, 17, 71, 289, 1169, 4697 a, 18825 a, 75363 a

Abbiamo (di)mostrato come, data un qualsiasi numero razionale *s*, esiste sempre una soluzione, approssimata a piacere, della equazione

$$q\left(m, r, n; \frac{mr}{n}\right) = s$$

l'approssimazione migliora al crescere di m, r. Quanto più s si avvicina ad 1 tanto minori saranno i valori di m, r a parità di approssimazione voluta.

Un esempio su tutti. Sia s=2/3 e l'approssimazione cercata migliore di 10^{-3}. La prima configurazione che soddisfa il requisito è $q(4,100,100;4)$. Se invece s=4/5 basta utilizzare $q(3,13,13;3)$.

Il comportamento è di tipo logaritmico, avendosi asintoticamente, per r, n sufficientemente grandi

$$q\left(m, kr, kn; \frac{mr}{n}\right) = q\left(m, r, n; \frac{mr}{n}\right)^k \qquad [16.6]$$

per cui si riesce ad effettuare il calcolo numerico di parametro r grande.