15. Cerchio quadrato

Alcuni integrali definiti, riconducibili ad una medesima tipologia, rappresentano lo stesso numero: occupiamoci di alcuni di essi.

Supponiamo di voler calcolare l'apparentemente ostico

$$\int_1^0 \frac{\ln(1-x)^6}{x}dx$$

Il fatto che gli estremi di integrazioni sono invertiti rispetto a quanto siamo abituati è sospetto, ma non preoccupante; mentre la presenza dell'esponente per l'argomento del logaritmo può essere eliminata, allora procediamo così:

$$\int_1^0 \frac{\ln(1-x)^6}{x}dx = 6\int_1^0 \frac{\ln(1-x)}{x}dx$$

il numeratore dell'integrando può essere sviluppato in serie di potenze nell'intorno dell'origine

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$$

quindi

$$\int_1^0 \frac{\ln(1-x)^6}{x}dx = 6\int_1^0 \frac{\ln(1-x)}{x}dx = 6\int_0^1 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n} + \ldots\right)dx$$

avendo riconciliato il verso di integrazione con il segno della serie. Essa converge uniformemente nell'intervallo [0, 1] per cui possiamo senz'altro integrare termine a termine ed avere

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n} + \ldots\right)dx = \left| x + \frac{x^2}{2\cdot 2} + \frac{x^3}{3\cdot 3} + \frac{x^4}{4\cdot 4} + \ldots + \frac{x^n}{n\cdot n} + \ldots \right|_0^1$$

L'integrazione definita è presto fatta: nell'estremo inferiore tutti i termini sono nulli, nel superiore valgono tutti uno, per cui

$$\int_1^0 \frac{\ln(1-x)^6}{x}dx = 6\int_1^0 \frac{\ln(1-x)}{x}dx = 6\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right)$$

serie che riconosciamo immediatamente, per cui infine

$$\int_1^0 \frac{\ln(1-x)^6}{x}dx = \pi^2 \qquad [15.1]$$

Un semplice cambio di segno e possiamo calcolare

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)^{12}}{x}dx$$

in maniera del tutto simile. Dal fatto che

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

abbiamo

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)^{12}}{x}dx = 12\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = 12\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{n}+..\right)dx$$

Per la stessa ragione possiamo integrare termine a termine, che vuol dire scambiare il segno di integrale con quello di somma, e avere

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)^{12}}{x}dx = 12\left|1-\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^3}{3\cdot 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot n}+..\right|_0^1 = 12\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{n^2}+..\right)$$

La serie somma della serie è parimenti nota e vale la metà della precedente, per cui

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)^{12}}{x}dx = \pi^2 \qquad [15.2]$$

Confrontando tra loro i due risultati abbiamo

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)^6}{x}dx + \int_0^1 \frac{\ln(1+x)^{12}}{x}dx = 0$$

ovvero

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)^6 + 2\ln(1+x)^6}{x}dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)^6 + \ln(1+x)^6}{x}dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x-x^2-x^3)^6}{x}dx$$

e il risultato finale seguente

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x-x^2-x^3)}{x}dx = 0 \qquad [15.3]$$

L'integrando è comunque suscettibile di essere sviluppato in serie di potenze nell'intorno dell'origine:

$$\frac{\ln(1+x-x^2-x^3)}{x} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{7}x^6 - \frac{3}{8}x^7 + \frac{1}{9}x^8 - \frac{3}{10}x^8 \pm \ldots$$

L'integrazione termine a termine dice che

$$0 = 1 - \frac{3}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} - \frac{3}{4\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 5} - \frac{3}{6\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 7} - \frac{3}{8\cdot 8} + \frac{1}{9\cdot 9} - \frac{3}{10\cdot 10} \pm \ldots$$

Algebricamente, cioè trasportando e cambiando quindi segno alle frazioni di numeratore 3,

$$3\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots.\right) = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots$$

$$\frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots.\right) = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots$$

che è ben noto.

Calcoliamo ancora

$$\int_1^0 \frac{\ln(1-x^2)^2}{x}\,dx$$

Scriviamo speditamente che

$$\int_1^0 \frac{\ln(1-x^2)^2}{x}\,dx = 2\int_0^1 \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^7}{4} + \ldots \right) dx = 2\left| \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{3\cdot 6} + \frac{x^8}{4\cdot 8} + \ldots \right|_0^1$$

$$= 2\cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots \right)$$

ed infine di nuovo

$$\int_1^0 \frac{\ln(1-x^2)^2}{x}\,dx = \pi^2 \qquad [15.4]$$

Invece del solito passo in avanti stavolta facciamo un passo indietro per mettere ordine riepilogando

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{2}$$

Lascio di calcolare, ormai in maniera nota, che

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{24} \qquad [15.5]$$

Troviamo rapidamente in genere che

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^k)}{x}dx = \int_0^1 \left(x^{k-1} - \frac{x^{2k-1}}{2} + \frac{x^{3k-1}}{3} - \frac{x^{4k-1}}{4} \pm .... \right) dx = \left| \frac{x^k}{k} - \frac{x^{2k}}{2 \cdot 2k} + \frac{x^{3k}}{3 \cdot 3k} - \frac{x^{4k}}{4 \cdot 4k} \pm .... \right|$$

ed infine

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^k)}{x}dx = \frac{1}{k}\frac{\pi^2}{12} \qquad [15.6]$$

D'altro canto

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^k)}{x}dx = -\int_0^1 \left(x^{k-1} + \frac{x^{2k-1}}{2} + \frac{x^{3k-1}}{3} + \frac{x^{4k-1}}{4} + ... \right) dx = -\left| \frac{x^k}{k} + \frac{x^{2k}}{2 \cdot 2k} + \frac{x^{3k}}{3 \cdot 3k} + \frac{x^{4k}}{4 \cdot 4k} + ... \right|$$

ossia

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^k)}{x}dx = -\frac{1}{k}\frac{\pi^2}{6} \qquad [15.7]$$

Sommando il doppio della [15.6] alla [15.7]:

$$\int_0^1 \frac{\ln\left[(1-x^{2k})(1+x^k)\right]}{x}dx = 0 \qquad [15.8]$$

Vale un discorso simile, ma dagli esiti diversi, per il calcolo di

$$\int_1^0 \frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \left[1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{x}}{4} + \frac{x^5}{5} + ... \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{n} + ... \right] dx$$

L'integrazione del termine generico della serie

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{n}dx = \left.\frac{2x^{\frac{n+1}{2}}}{n(n+1)}\right|_0^1 = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

restituisce per l'integrale una serie telescopica che si somma immediatamente, con risultato pari al primo termine ovvero 2, per cui

$$\int_1^0 \frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2$$

Invece

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \left[1 - \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x\sqrt{x}}{4} + \frac{x^5}{5} \pm \ldots (-1)^{n+1}\frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{n} \pm \ldots\right]dx$$

Il termine generale è lo stesso, ma le coppie hanno il segno alterno, per cui abbiamo

$$(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{n}dx = (-1)^{n+1}\left.\frac{2x^{\frac{n+1}{2}}}{n(n+1)}\right|_0^1 = (-1)^{n+1}\frac{2}{n(n+1)} = (-1)^{n+1}\left[\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right]$$

e la serie è

$$2\left\{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots\ldots\right\} =$$

$$2\left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \mp \ldots - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \mp \ldots\right\} = 2\{\ln 2 + \ln 2 - 1\}$$

in conclusione quindi

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 4\ln 2 - 2 \qquad [15.9]$$

Le ultime due non …. quadrano col cerchio. Sommandole tra loro

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})-\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^1 \ln\frac{1+y}{1-y}\,dy = 4\ln 2$$

avendo fatto nell'ultimo passaggio $y=\sqrt{x}$. Tale sostituzione avrebbe dato i risultati [15.8] e [15.9] in maniera immediata mediante …. semplici quadrature, il che riscatta l'asserzione precedente.