6. A pezzi

Il primo impatto che ebbi con il corso di Analisi all'università fu lo stupore nel vedere l'uso così esteso che si faceva di problemi che coinvolgevano la funzione mantissa, ovvero la parte frazionaria di un certo numero reale α che indichiamo con $\{\alpha\}$.

Memore di ciò propongo alcuni integrali che coinvolgono tale funzione. Notiamo innanzitutto che è

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+j)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{m=0}^{j}k+m} \qquad [6.1]$$

Allora proviamo a calcolare l'integrale

$$M_2=\int_1^{\infty}\frac{\{\sqrt{x}\}}{x^2}dx$$

che si vede subito essere convergente perchè il numeratore dell'integrando non supera mai l'unità, in effetti non la raggiunge affatto. Abbiamo

$$M_2=\int_1^{\infty}\frac{\{\sqrt{x}\}}{x^2}dx=\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}-[\sqrt{x}]}{x^2}dx=\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2}dx-\int_1^{\infty}\frac{[\sqrt{x}]}{x^2}dx$$

che si è potuto fare in quanto ciascuno dei due integrali separatamente converge

$$M_2=\int_1^{\infty}x^{-3/2}dx-\int_1^{\infty}\frac{[\sqrt{x}]}{x^2}dx=2-\int_1^{\infty}\frac{[\sqrt{x}]}{x^2}dx$$

L'ultimo integrale si può scrivere come somma di integrali tra intervalli delimitati da quadrati consecutivi:

$$\int_1^{\infty}\frac{[\sqrt{x}]}{x^2}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k^2}^{(k+1)^2}\frac{[\sqrt{x}]}{x^2}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k^2}^{(k+1)^2}\frac{k}{x^2}dx=\sum_{k=1}^{\infty}k\int_{k^2}^{(k+1)^2}\frac{dx}{x^2}=\sum_{k=1}^{\infty}k\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right]$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che la parte intera della radice quadrata è una costante in ciascuno degli intervalli considerati. Ora occorre semplicemente calcolare la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^2}=2\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)+2-\frac{\pi^2}{6}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

ed infine

$$M_2=\int_1^{\infty}\frac{\left\{\sqrt{x}\right\}}{x^2}dx=2-\frac{\pi^2}{6}$$

Vediamo l'integrale

$$M_3=\int_1^{\infty}\frac{\left\{\sqrt{x}\right\}}{x^3}dx$$

Applichiamo lo stesso metodo per avere

$$M_3=\int_1^{\infty}\frac{\left\{\sqrt{x}\right\}}{x^3}dx=\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}-\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor}{x^3}dx=\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^3}dx-\int_1^{\infty}\frac{\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor}{x^3}dx=\frac{2}{3}-\int_1^{\infty}\frac{\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor}{x^3}dx$$

L'ultimo integrale è

$$\int_1^{\infty}\frac{\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor}{x^3}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k^2}^{(k+1)^2}\frac{\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor}{x^3}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k^2}^{(k+1)^2}\frac{k}{x^3}dx=\sum_{k=1}^{\infty}k\int_{k^2}^{(k+1)^2}\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k\left[\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k+1)^4}\right]$$

per la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\left[\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k+1)^4}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k^3+6k^2+4k+1}{k^3(k+1)^4}=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^4}+6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^4}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)^3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3(k+1)^4}$$

Il calcolo delle serie si basa sulla formula generale (e magnifica)

\

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^m(k+1)^n}=(-1)^m\sum_{j=0}^{n-2}\binom{m+j-1}{j}\zeta(n-j)+\sum_{j=0}^{m-2}(-1)^j\binom{n+j-1}{j}\zeta(m-j)+(-1)^{m-1}\binom{m+n-1}{n-1}$$

[5.1]

. . . basta applicarla per avere i singoli addendi:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^4}=\zeta(4)-1$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^4}=4-\zeta(4)-\zeta(3)-\zeta(2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)^3}=\zeta(4)+2\zeta(3)+4\zeta(2)-10$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3(k+1)^4}=20-\zeta(4)-2\zeta(3)-10\zeta(2)$$

e allora

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\left[\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k+1)^4}\right]=\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$$

e

$$M_3=\int_1^{\infty}\frac{\{\sqrt{x}\}}{x^3}dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\zeta(4)=\frac{2}{3}-\frac{\pi^4}{180}$$

Il caso generale è

$$M_n=\int_1^{\infty}\frac{\{\sqrt{x}\}}{x^n}dx=\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}-[\sqrt{x}]}{x^n}dx=\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^n}dx-\int_1^{\infty}\frac{[\sqrt{x}]}{x^n}dx=\frac{2}{2n-3}-\int_1^{\infty}\frac{[\sqrt{x}]}{x^n}dx$$

con

$$\int_1^\infty \frac{\left[\sqrt{x}\right]}{x^n}dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{\left[\sqrt{x}\right]}{x^n}dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{k}{x^n}dx = \sum_{k=1}^\infty k \int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^\infty k\left[\frac{1}{k^{2(n-1)}} - \frac{1}{(k+1)^{2(n-1)}}\right]$$

Applicando la [5.1] si ottiene che

$$\sum_{k=1}^\infty k\left[\frac{1}{k^{2(n-1)}} - \frac{1}{(k+1)^{2(n-1)}}\right] = \zeta(2n-2)$$

ed infine

$$M_{n,2} = \int_1^\infty \frac{\left\{\sqrt{x}\right\}}{x^n}dx = \frac{2}{2n-3} - \frac{\zeta(2n-2)}{n-1} \qquad [5.2]$$

L'applicazione della [5.1] ci dà una rappresentazione per la funzione ζ come serie:

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^\infty k\left[\frac{1}{k^t} - \frac{1}{(k+1)^t}\right] \qquad [5.3]$$

che possiamo prolungare analiticamente su tutto il piano complesso.

Si può anche studiare l'integrale

$$M_{2,3} = \int_1^\infty \frac{\left\{\sqrt[3]{x}\right\}}{x^2}dx = \int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}dx - \int_1^\infty \frac{\left[\sqrt[3]{x}\right]}{x^2}dx$$

$$M_{2,3} = \int_1^\infty x^{-5/3}dx - \int_1^\infty \frac{\left[\sqrt[3]{x}\right]}{x^2}dx = \frac{3}{2} - \int_1^\infty \frac{\left[\sqrt[3]{x}\right]}{x^2}dx = \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^\infty \int_{k^3}^{(k+1)^3} \frac{\left[\sqrt[3]{x}\right]}{x^2}dx = \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^\infty \int_{k^3}^{(k+1)^3} \frac{k}{x^2}dx$$

Si tratta ora di calcolare

$$\sum_{k=1}^\infty \int_{k^3}^{(k+1)^3} \frac{k}{x^2}dx = \sum_{k=1}^\infty k\left[\frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3}\right]$$

e ci viene in soccorso la [5.3] per cui

$$M_{2,3}=\int_1^\infty \frac{\left\{\sqrt[3]{x}\right\}}{x^2}dx=\frac{3}{2}-\zeta(3)$$

e l'andamento generale è chiaro.

Si può anche considerare un altro tipo di integrale:

$$I_{1,2}=\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2}dx=\int_1^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}dx=\sum_{k=1}^\infty \int_k^{k+1}\frac{x-k}{x^2}dx=\sum_{k=1}^\infty\left[\ln(k+1)-\ln k-\frac{1}{k+1}\right]=$$

$$=\left(\ln 2-\ln 1-\frac{1}{2}\right)+\left(\ln 3-\ln 2-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\ln(k+1)-\ln k-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\ln(k+2)-\ln(k+1)-\frac{1}{k+2}\right)+\ldots$$

$$=\ln(k+1)-\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k+1}=1+\ln(k+1)-\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}=1+\ln(k+1)-\ln k+\ln k-\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}=$$

$$=1+\ln\frac{k+1}{k}-\gamma=1-\gamma$$

dove si è inteso il passaggio al limite infinito per k e γ è la costate di Eulero-Mascheroni.

Ancora

$$I_{1,3}=\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^3}dx=\int_1^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^3}dx=\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}-\int_1^\infty \frac{\lfloor x\rfloor}{x^3}dx=1-\sum_{k=1}^\infty \int_k^{k+1}\frac{k}{x^3}dx=1-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty k\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right]=$$

$$=1-\frac{1}{2}\zeta(2)=1-\frac{\pi^2}{12}$$

e anche qui l'andamento è chiaro.

Se abbiamo

$$I_{2,3}=\int_1^{\infty}\frac{\{x^2\}}{x^3}dx=\int_1^{\infty}\frac{x^2-\lfloor x^2\rfloor}{x^3}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}}\frac{x^2-k}{x^3}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}}\frac{dx}{x}-\int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}}\frac{kdx}{x^3}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\sqrt{k+1}-\ln\sqrt{k}-k\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\sqrt{k+1}-\ln\sqrt{k}-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k(k+1)}\right)\right]=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\sqrt{k+1}-\ln\sqrt{k}-\frac{1}{2(k+1)}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\sqrt{k+1}-\ln\sqrt{k}-\frac{1}{2(k+1)}\right]=$$

$$-\frac{1}{2.2}+-\frac{1}{2.3}+\ln\sqrt{4}--\frac{1}{2.4}=\ln\sqrt{k+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}\left[\ln(k+1)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln(k+1)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}+1\right]=\frac{1}{2}(1-\gamma)$$

Ancora

$$I_{2,4}=\int_1^{\infty}\frac{\{x^2\}}{x^4}dx=\int_1^{\infty}\frac{x^2-\lfloor x^2\rfloor}{x^4}dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}}\frac{\lfloor x^2\rfloor}{x^4}dx=1-\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}}\frac{k}{x^4}dx=$$

$$=1-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}k\left[\frac{1}{k^{3/2}}-\frac{1}{(k+1)^{3/2}}\right]=1-\frac{1}{3}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

ed è di nuovo chiaro il metodo per generalizzare:

$$I_{m,m+1}=\int_1^{\infty}\frac{\{x^m\}}{x^{m+1}}dx=\frac{1}{m}(1-\gamma)$$

$$I_{m,m+2}=\int_1^{\infty}\frac{\{x^m\}}{x^{m+2}}dx=1-\frac{1}{m+1}\zeta\left(\frac{m+1}{m}\right)$$

Se abbiamo infine (s>1)

$$I_{m,m+s} = \int_1^\infty \frac{\{x^m\}}{x^{m+s}}dx = \int_1^\infty \frac{x^m - \lfloor x^m \rfloor}{x^{m+s}}dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} - \sum_{k=1}^\infty \int_{\sqrt[m]{k}}^{\sqrt[m]{k+1}} \frac{\lfloor x^m \rfloor}{x^{m+s}}dx = \frac{1}{s-1} - \sum_{k=1}^\infty \int_{\sqrt[m]{k}}^{\sqrt[m]{k+1}} \frac{k}{x^{m+s}}dx =$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+m-1}\sum_{k=1}^\infty k\left[\frac{1}{k^{(m+s-1)/m}} - \frac{1}{(k+1)^{(m+s-1)/m}}\right] = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+m-1}\zeta\left(\frac{m+s-1}{m}\right)$$

Una dimostrazione diretta della [5.3] è molto semplice, direi elementare:

$$\sum_{k=1}^\infty k\left[\frac{1}{k^t} - \frac{1}{(k+1)^t}\right] = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{t-1}} - \frac{k+1-1}{(k+1)^t} = \zeta(t-1) - \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+1)^{t-1}} + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+1)^t} =$$

$$= \zeta(t-1) - \zeta(t-1) + 1 + \zeta(t) - 1 = \zeta(t)$$

che fornisce una semplice rappresentazione integrale per la funzione ζ

$$\int_1^\infty \frac{\lfloor x^m \rfloor}{x^{m+s}}dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{\sqrt[m]{k}}^{\sqrt[m]{k+1}} \frac{k}{x^{m+s}}dx = \frac{1}{s+m-1}\sum_{k=1}^\infty k\left[\frac{1}{k^{(m+s-1)/m}} - \frac{1}{(k+1)^{(m+s-1)/m}}\right] = \frac{1}{s+m-1}\zeta\left(\frac{m+s-1}{m}\right)$$

ossia

$$\zeta\left(\frac{m+s-1}{m}\right) = (s+m-1)\int_1^\infty \frac{\lfloor x^m \rfloor}{x^{m+s}}dx \qquad [5.4]$$

s=m+1 dice che

$$\zeta(2) = 2m\int_1^\infty \frac{\lfloor x^m \rfloor}{x^{2m+1}}dx$$

s=2m+1 che

$$\zeta(3) = 3m\int_1^\infty \frac{\lfloor x^m \rfloor}{x^{3m+1}}dx$$

e s=(k-1)m+1 dà

$$\zeta(k) = km\int_1^\infty \frac{\lfloor x^m \rfloor}{x^{km+1}}dx$$

mentre quando s=m>1 otteniamo

$$\zeta\left(\frac{2m-1}{m}\right) = (2m-1)\int_1^\infty \frac{\lfloor x^m \rfloor}{x^{2m}}dx$$

Se m=1

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{\lfloor x \rfloor dx}{x^{s+1}} \qquad\qquad s>1$$