27. Ci siamo quasi

L'analisi discreta di Fourier permette di trovare molti fatti interessanti. Riassumiamo qui un risultato di validità generale: per ogni funzione $f(x)$ periodica in un intervallo $[-T, T]$ (che non sia "patologica") esiste una serie di coppie (a_n, b_n) tali che è possibile scrivere

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}\right] \qquad [27.1]$$

dove

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\cos\frac{n\pi t}{T} f(t)dt \\ b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\sin\frac{n\pi t}{T} f(t)dt \end{cases} \qquad [27.2]$$

La [27.2] è la scomposizione spettrale di $f(x)$. Per i coefficienti (a_n, b_n) si ha la relazione notevole

$$\sum_{n=0}^{\infty}[a_n^2 + b_n^2] = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt \qquad [27.3]$$

Qualche esempio ci illustra la situazione. Supponiamo di avere la funzione $\sin\sqrt{\pi}x$. Essa è una funzione dispari, periodica in $[-\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}]$. Calcoliamo i coefficienti a_n:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\cos\frac{n\pi t}{2\sqrt{\pi}}\sin\sqrt{\pi}t\,dt = 0$$

come ci aspettavamo, vista la disparità della funzione, che quindi, proiettata su una base di funzioni pari, deve avere componenti nulle.

Per i coefficienti b_n:

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\sin\frac{n\pi t}{2\sqrt{\pi}}\sin\sqrt{\pi}t\,dt = \frac{(n+2)\sin\frac{\pi n - 2\pi}{2} - (n-2)\sin\frac{\pi n + 2\pi}{2}}{\pi n^2 - 4\pi}$$

L'espressione appare complicata, ma non è così: ecco esplicitamente i primi valori (per b_2 occorre passare al limite)

$$b(1) = \frac{4}{3\pi} = 0{,}42441318$$

$$b(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

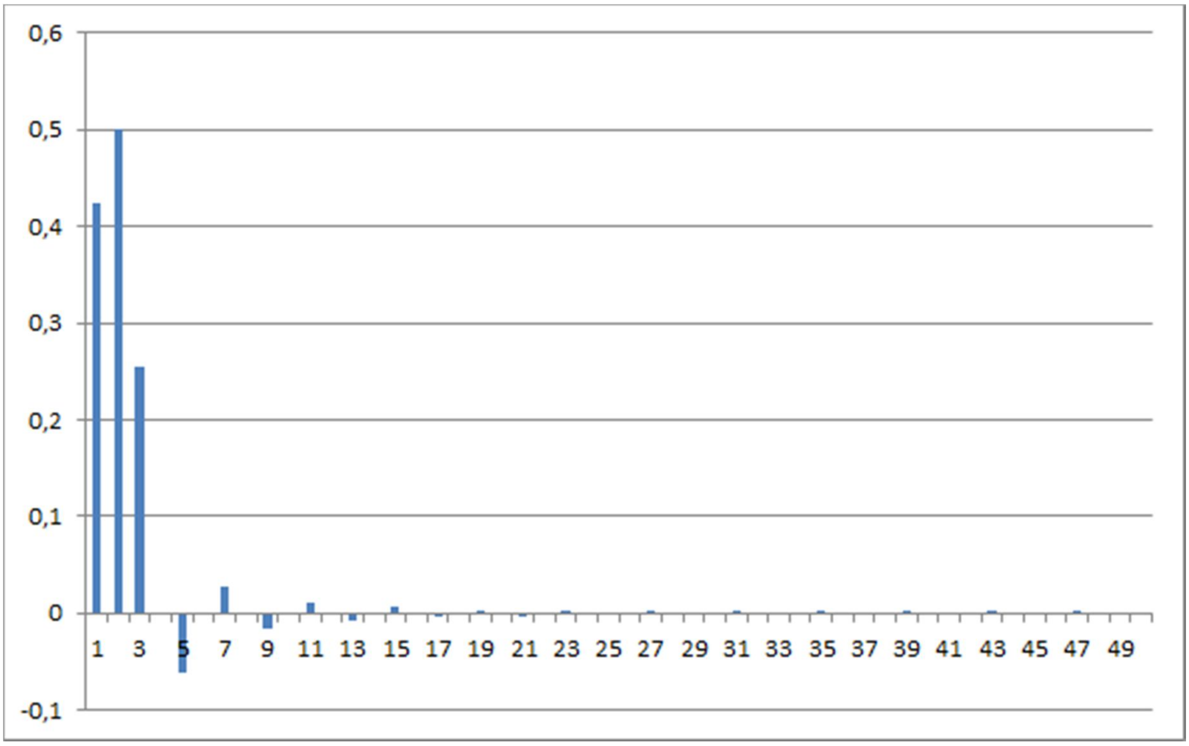
$b(3) = \frac{4}{5\pi} = 0{,}2546479$

$b(2n, n > 1) = 0$

$b(5) = -\frac{4}{21\pi} = -0{,}0606304$

$b(2n+1, n > 1) = (-1)^{n+1} \frac{4}{(2n-1)(2n+3)\pi}$

La rappresentazione spettrale è ben visibile in un grafico:



La rappresentazione spettrale di $\sin\sqrt{\pi}x$

Poiché $\sqrt{\pi} \approx 1{,}774 \ldots$ ci aspettiamo che i coefficienti di $\sin\frac{n\sqrt{\pi}x}{2} = \sin 0{,}886nx$ sensibilmente diversi da zero siano tali che $0{,}886n$ sia vicino a $1{,}774$. Infatti il coefficiente più grande è in corrispondenza di *n*=2. A parte *n*=1, 3, 5, 7, 9, tutti gli altri sono "piccoli" e decrescono con $1/n^2$.

Dal momento che

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \sin^2 \sqrt{\pi}x\, dx = \sqrt{\pi}$$

la [27.3] dice che

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{2}$$

ovvero

$$\frac{1}{4} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+3)^2} = \frac{1}{2}$$

ossia

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+3)^2} = \frac{\pi^2}{64} \qquad [27.4]$$

scomponendo in fratti semplici:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3-2n}{(2n-1)^2} + \frac{5+2n}{(2n+3)^2}\right] = \frac{\pi^2}{2}$$

Riassumendo abbiamo che

$$\sin\sqrt{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(n+2)\sin\frac{\pi n-2\pi}{2} - (n-2)\sin\frac{\pi n+2\pi}{2}}{\pi n^2 - 4\pi}\right] \sin\frac{n\sqrt{\pi x}}{2}$$

ovvero, fermandoci ai primi termini, che sono apprezzabilmente diversi da zero,

$$\sin\sqrt{\pi x} \approx \frac{4}{3\pi}\sin\frac{\sqrt{\pi x}}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\sqrt{\pi x}}{2} + \frac{4}{4\pi}\sin\frac{3\sqrt{\pi x}}{2} - \frac{4}{21\pi}\sin\frac{5\sqrt{\pi x}}{2} + \frac{4}{45\pi}\sin\frac{7\sqrt{\pi x}}{2} - -\frac{4}{77\pi}\sin\frac{9\sqrt{\pi x}}{2} + \ldots$$

Lo sviluppo, del tutto simile, per $\cos\sqrt{\pi x}$ fornisce solo termini a_n:

$$a_{2n,n\neq 1} = 0$$

$$a_1 = \frac{2}{3\pi}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{6}{5\pi}$$

$$a_5 = -\frac{10}{21\pi}$$

$$a_7 = \frac{14}{45\pi}$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{n+1}\frac{2(2n+1)}{[(2n+1)^2-4]\pi}$$

Ora, dal momento che è pure

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \cos^2 \sqrt{\pi}x\,dx = \sqrt{\pi}$$

la [27.3] dice che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2}$$

ovvero

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2}{[(2n+1)^2-4]^2} = \frac{1}{2}$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2}{[(2n+1)^2-4]^2} = \frac{\pi^2}{16} \qquad [27.5][1]$$

Vediamo ancora $\sin\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right)$, abbiamo in questo caso

$$b_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\int_{-\pi\sqrt{\pi}}^{\pi\sqrt{\pi}} \sin\frac{nt}{2\sqrt{\pi}} \sin\frac{t}{\sqrt{\pi}}\,dt$$

$$b(1) = \frac{4}{3\pi}$$

[1] Si tratta della formula 5.1.21.41 del testo di Prudnikov, Brychkov, Marichev: *Integrals and series* (1986), vol.1 *Elementary Functions*, pag. 677.

$b(2) = \frac{1}{2}$

$b(3) = \frac{4}{5\pi}$

$b(5) = -\frac{4}{21\pi}$

$b(2n, n > 1) = 0$

$b(2n + 1, n > 1) = (-1)^{n+1} \frac{2}{[(2n+1)^2-4]\pi}$

Poiché

$$\int_{-\pi\sqrt{\pi}}^{\pi\sqrt{\pi}} \sin^2 \frac{x}{\sqrt{\pi}} dx = \pi\sqrt{\pi}$$

la [27.3] dice che è ancora

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{2}$$

quindi

$$\frac{1}{4} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(2n+1)^2-4]^2} = \frac{1}{2}$$

ossia

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(2n+1)^2-4]^2} = \frac{\pi^2}{64}$$

che è identica alla [27.4].
Per ultimo calcoliamo i coefficienti di $\cos\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right)$:

$a(1) = \frac{2}{3\pi}$

$b(2) = \frac{1}{2}$

$a(3) = \frac{6}{5\pi}$

$a(5) = -\frac{10}{21\pi}$

$a(2n, n > 1) = 0$

$a(2n+1, n > 1) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n+1)}{[(2n+1)^2 - 4]\pi}$

Poiché

$$\int_{-\pi\sqrt{\pi}}^{\pi\sqrt{\pi}} \cos^2 \frac{x}{\sqrt{\pi}} dx = \pi\sqrt{\pi}$$

la [27.3] dice che è ancora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2}$$

e quindi troviamo di nuovo la [27.5]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{[(2n+1)^2 - 4]^2} = \frac{\pi^2}{16}$$

Riscriviamo le due relazioni [27.4] e [27.5] trovate prima in forma semplificata: sia

$2n - 1 = A_n$

$2n + 3 = B_n = A_n + 4$

allora (per semplicità di scrittura ometto gli estremi di sommatoria)

$$\frac{\pi^2}{64} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+3)^2} = \sum \frac{1}{A_n^2 \cdot B_n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{16} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{A_n^2 \cdot B_n^2} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n}{A_n^2 \cdot B_n^2} + \sum \frac{1}{A_n^2 \cdot B_n^2}$$

da cui

$$\frac{3\pi^2}{64} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n}{A_n^2 \cdot B_n^2}$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n}{(2n-1)^2(2n+3)^2} = \frac{3\pi^2}{256} = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+3)^2}$$

Se chiamiamo $\sigma = \frac{3\pi^2}{256} = \sigma_2 + \sigma_1$ con

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)^2(2n+3)^2} = \sigma_2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+3)^2} = \sigma_1$$

abbiamo

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{4 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$$

quindi

$$\sigma_1 = \frac{4 - \sqrt{2}}{7} \sigma = \frac{4 - \sqrt{2}}{7} \cdot \frac{3\pi^2}{256}$$

e

$$\sigma_2 = \frac{3 + \sqrt{2}}{7} \sigma = \frac{3 + \sqrt{2}}{7} \cdot \frac{3\pi^2}{256}$$

che costituiscono l’espressione esplicita delle somme.