18. Sui Polinomi Ortogonali

In algebra lineare, dati due vettori **u** e **v** rappresentati in una base ortonormale attraverso le rispettive componenti u_i e v_i diciamo che essi sono tra loro ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo, ovvero

$$\sum_i u_i \cdot v_i = 0 \qquad [18.1]$$

Una naturale estensione della caratteristica di ortogonalità alle funzioni di una variabile (reale) consiste nel sostituire la sommatoria con un integrale su un opportuno intervallo; è definito come prodotto scalare di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ rispetto ad un dato peso $w(x)$[1] la quantità:

$$\int_a^b f(x)w(x)g(x)dx \qquad [18.2]$$

Se questo integrale è nullo, le due funzioni si dicono ortogonali rispetto al peso $w(x)$. Quando le funzioni f e g sono dei polinomi allora siamo in presenza di una importantissima classe di funzioni speciali dette polinomi ortogonali, che indichiamo con $P_n(x)$. Essi sono tali che sussistono i seguenti fatti:

$P_n(x)$ è un polinomio esattamente di grado n;

$$\int_a^b P_n(x)w(x)P_m(x)dx = c_{nm}\delta_{nm} \qquad [18.3]$$

dove δ_{mn} è non nullo se e solo se $m=n$. In questo simbolo riconosciamo il δ di Kronecker.

In relazione a specifiche scelte della funzione peso e dei limiti di integrazione si hanno particolari insiemi di polinomi. Ne riporto un breve elenco tra quelli "classici":

Simbolo e nome	$w(x)$	a	b
T_n : Chebishev di prima specie	$1/\sqrt{1-x^2}$	-1	1
U_n : Chebishev di seconda specie	$\sqrt{1-x^2}$	-1	1
P_n : Legendre	1	-1	1
H_n : Hermite	e^{-x^2}	- ∞	+∞
L_n : Laguerre	e^{-x}	0	+∞

---

[1] L'unica condizione per la funzione w è che sia $\int_a^b w(x)dx > 0$.

$C^{(\alpha)}{}_n$: Gegenbauer	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$	-1	1
$P^{(\alpha,\beta)}{}_n$: Jacobi	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	-1	1

Tutti i sistemi di polinomi ortogonali sono soluzioni di particolari equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine del tipo

$$Q(x)P''(x)+L(x)P'(x)+\lambda P(x)=0 \qquad [18.4]$$

detta di Sturm-Liouville, dove $Q(x)$ è un polinomio al massimo di secondo grado, $L(x)$ è un polinomio al massimo di primo grado e l è un parametro.

Effettuando la posizione

$$R(x)=e^{\int^{x}\frac{L(t)}{Q(t)}dt} \qquad [18.5]$$

si ottiene la forma normalizzata dell'equazione di Sturm-Liouville, ossia

$$\frac{d}{dx}\left[R(x)P'(x)\right]+\frac{R(x)}{Q(x)}\lambda P(x)=0 \qquad [18.6]$$

basta derivare infatti il prodotto *RP'* : si ottiene *RP"+R'P'=RP"+RLP'/Q* che va confrontata con la [18.4] moltiplicata per *R/Q*.

Per ogni classe di polinomi $P(x)$ vale la formula seguente, detta di Rodrigues:

$$P_n(x)=\frac{1}{e_n w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[w(x)Q^n(x)\right] \qquad [18.7]$$

Tutti i polinomi $P_n(x)$ hanno esattamente n radici reali, che sono tutte contenute nell'intervallo $[a,b]$, inoltre ciascuna radice di $P_n(x)$ è compresa tra due radici consecutive del polinomio $P_{n+1}(x)$. Questi due fatti sono veramente straordinari, e ne vedremo le implicazioni.

Infine riportiamo un'ulteriore delicatissima proprietà: ogni polinomio, elemento di una determinata classe, obbedisce ad una relazione di ricorrenza a tre termini

$$P_{n+2}(x)=(u_{n+1}x+v_{n+1})P_{n+1}(x)-z_nP_n(x) \qquad [18.8]$$

Date queste caratteristiche valevoli per qualsiasi classe di polinomi ortogonali, approfondiamo alcune interessanti proprietà dei polinomi di Chebishev di prima e seconda specie.

L'equazione differenziale che li definisce è

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0 \qquad [18.9]$$

$$(1-x^2)U_n''(x)-3xU_n'(x)+n(n+2)U_n(x)=0 \qquad [18.10]$$

La formula fondamentale di ricorrenza è la medesima per entrambi, con diverse condizioni iniziali:

$$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x) \qquad T_0=1;\ T_1=x \qquad [18.11a]$$

$$U_{n+2}(x)=2xU_{n+1}(x)-U_n(x) \qquad U_0=1;\ U_1=2x \qquad [18.11b]$$

Con l'ausilio della formula di ricorrenza possiamo immediatamente scrivere una tabella dei polinomi di ordine più piccolo:

n	T_n	U_n
0	1	1
1	x	$2x$
2	$2x^2$-1	$4x^2$-1
3	$4x^3$-$3x$	$8x^3$-$4x$
4	$8x^4$-$8x^2$+1	$16x^4$-$12x^2$+1
5	$16x^5$-$20x^3$+$5x$	$32x^5$-$32x^3$+$6x$
6	$32x^6$-$48x^4$+$18x^2$-1	$64x^6$-$80x^4$+$24x^2$-1
7	$64x^7$-$112x^5$+$56x^3$-$7x$	$128x^7$-$192x^5$+$80x^3$-$8x$
8	$128x^8$-$256x^6$+$160x^4$-$32x^2$+1	$256x^8$-$448x^6$+$240x^4$-$40x^2$+1
9	$256x^9$-$576x^7$+$432x^5$-$120x^3$+$9x$	$512x^9$-$1024x^7$+$672x^5$-$160x^3$+$10x$
10	$512x^{10}$-$1280x^8$+$1120x^6$-$400x^4$+$50x^2$-1	$1024x^{10}$-$2304x^8$+$1792x^6$-$560x^4$+$60x^2$-1

Innumerevoli, naturalmente, le regolarità delle espressioni e dei relativi coefficienti.
Innanzitutto la parità, che corrisponde alla parità dell'esponente:

$$T_n(x)=(-1)^nT_n(-x) \qquad U_n(x)=(-1)^nU_n(-x)$$

Il coefficiente di grado massimo a_{nn} (n>0):

$$a_{nn}[T_n(x)]=2^{n-1} \qquad a_{nn}[U_n(x)]=2^n$$

Il coefficiente di grado minimo $a_{k,1}$ (k>0):

$$a_{2n+1,1}[T_{2n+1}(x)] = (-1)^{n+1} \cdot (2n+1)$$

$$a_{2n+1,1}[U_{2n+1}(x)] = (-1)^{n+1} \cdot (2n+2)$$

I termini noti valgono alternatamente +1 e -1.

Il valore negli estremi [-1, 1] dell'intervallo di integrazione:

$$T_n(-1) = (-1)^n \qquad T_n(1) = 1$$

$$U_n(-1) = (-1)^n \cdot (n+1) \qquad U_n(1) = n+1$$

Gli zeri sono distribuiti in maniera uniforme. Per verificarlo operiamo un cambiamento di variabile nelle equazioni differenziali di partenza; cominciamo con l'equazione per T_n e poniamo

$$x=\cos\theta \tag{18.12}$$

allora

$$T_0=1; \quad T_1=\cos\theta$$

$$T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta)$$

$$T_2(\cos\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$$

$$T_3(\cos\theta) = 2\cos\theta \cdot \cos 2\theta - \cos\theta = \cos 3\theta$$

…

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \tag{18.13}$$

Gli zeri di T_n sono quelli di cos $n\theta$, che sono pari a $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ essi sono quindi semplici:

$$\theta_{n0} = \frac{1}{n}\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \pi\frac{\pm 1 + 4k}{2n} \tag{18.14a}$$

$$x = \cos\theta_{n0} = \cos\left(\pi \frac{4k \pm 1}{2n}\right) \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad [18.14b]$$

In tabella i valori gli zeri dei primi polinomi, sono mostrati anche gli zeri centrali (x=0) degli indici dispari; i valori sono tutti doppi, in quanto preso ciascuno sia col segno “+” che col segno “-“:

	$x_{0,0}$	$x_{1,0}$	$x_{2,0}$	$x_{3,0}$	$x_{4,0}$	$x_{5,0}$
T_2	-	$\frac{1}{\sqrt{2}}$				
T_3	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$				
T_4	-	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$			
T_5	0	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}$			
T_6	-	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$		
T_7	0	$x_{1,0}$	$x_{2,0}$	$x_{3,0}$		
T_8	-	$\frac{\sqrt{2^{3/4}+\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{2^{7/8}}$	$\frac{\sqrt{2^{3/4}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{2^{7/8}}$	$\frac{\sqrt{2^{3/4}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{2^{7/8}}$	$\frac{\sqrt{2^{3/4}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{2^{7/8}}$	
T_9	0	$x_{1,0}$	$x_{2,0}$	$x_{3,0}$	$x_{4,0}$	
T_{10}	-	$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2^{5/2}}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2^{5/2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2^{5/2}}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2^{5/2}}}$

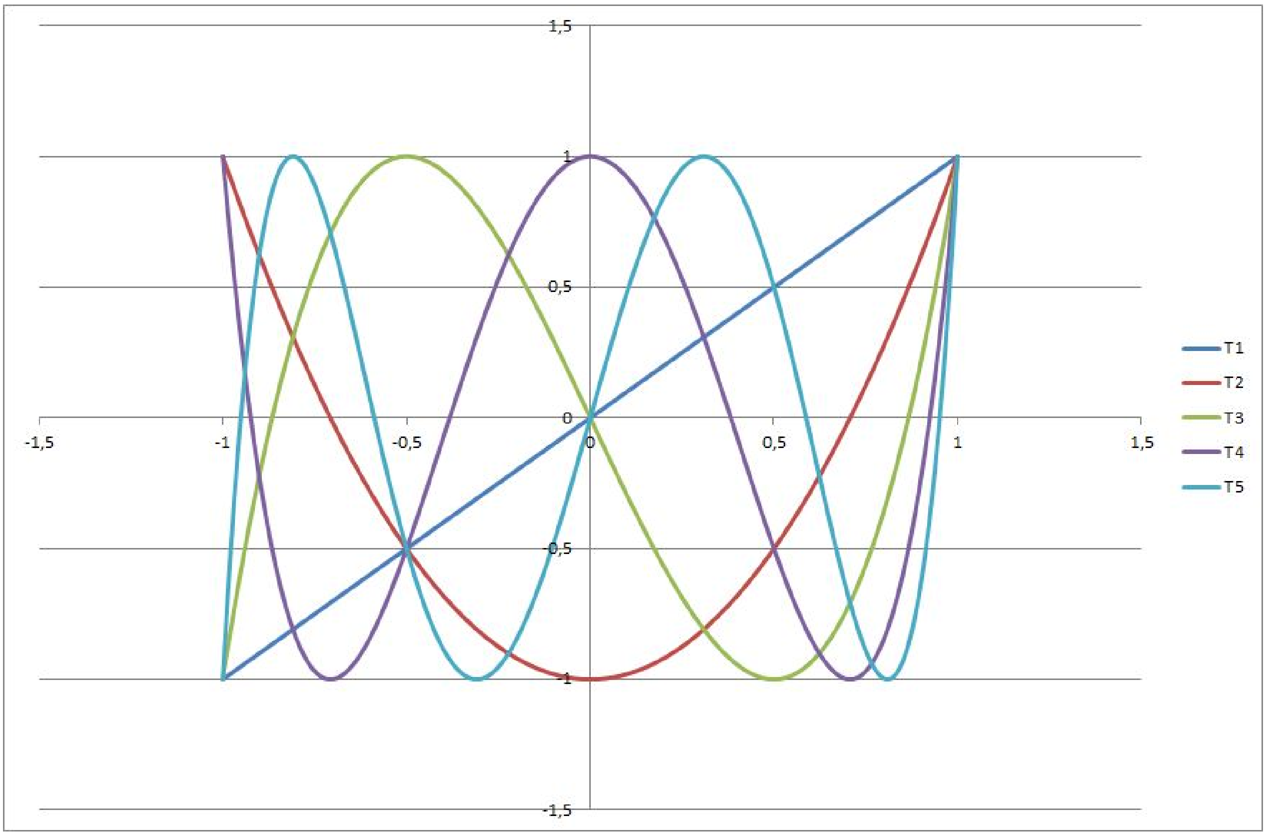
Numericamente

	$x_{0,0}$	$x_{1,0}$	$x_{2,0}$	$x_{3,0}$	$x_{4,0}$	$x_{5,0}$
T_2	-	0,707106781				
T_3	0	0,866025404				
T_4	-	0,923879533	0,382683432			
T_5	0	0,951056516	0,587785252			
T_6	-	0,965925826	0,707106781	0,258819045		
T_7	0	0,974927912	0,781831482	0,433883739	0,195090322	
T_8	-	0,980785280	0,831469612	0,555570233	0,342020143	
T_9	0	0,984807753	0,866025404	0,642787610	0,453990500	0,156434465
T_{10}	-	0,987688341	0,891006524	0,707106781	0,540640817	0,281732557

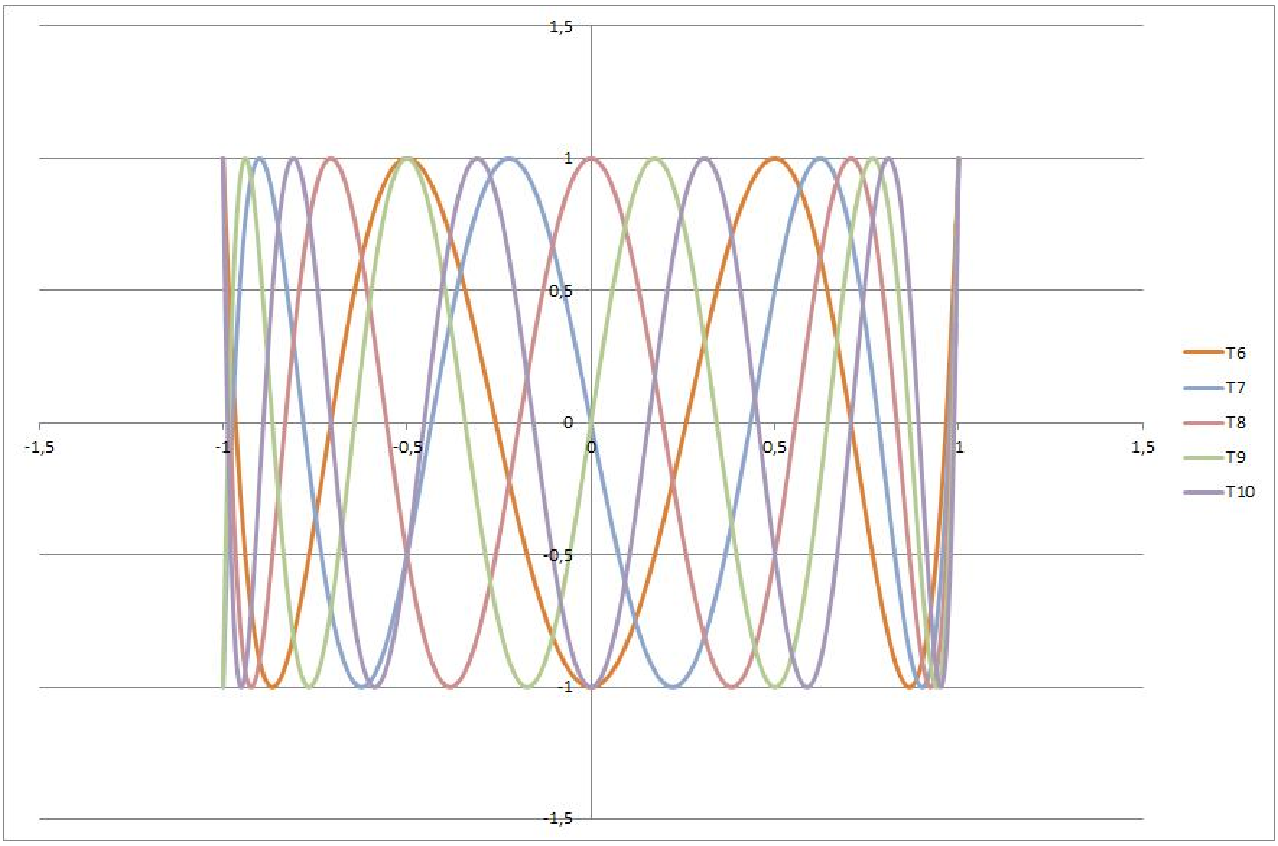
Le differenze prime, colonna per colonna, sono

	$x_{0,0}$	$\Delta x_{1,0}$	$\Delta x_{2,0}$	$\Delta x_{3,0}$	$\Delta x_{4,0}$	$\Delta x_{5,0}$
T_2	-					
T_3	-					
T_4	-	0,541196100				
T_5	-	0,363271264	0,587785252			
T_6	-	0,258819045	0,448287736	0,51763809		
T_7	-	0,193096430	0,347947743	0,433883739		
T_8	-	0,149315668	0,275899379	0,360479911	0,390180644	
T_9	-	0,118782349	0,223237794	0,300767466	0,342020143	
T_{10}	-	0,096681816	0,183899743	0,253116281	0,297556035	0,312868930

Tutte queste proprietà si visualizzano nella rappresentazione grafica:



I polinomi di Chebishev T_n di ordine 1-2-3-4-5



I polinomi di Chebishev T_n di ordine 6-7-8-9-10

La derivata di un polinomio di Chebishev non è a sua volta un nuovo polinomio di Chebishev, anche se è un polinomio ortogonale. Ma completezza e l'ortogonalità di quelli consente di esprimere tale derivata come combinazione lineare di polinomi di grado inferiore in maniera disaccoppiata. Scriviamo

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

$$T_{n-1}(x) = 2^{n-2}x^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} b_k x^k$$

allora

$$T'_n(x) = n2^{n-1}x^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} k a_k x^{k-1}$$

quindi

$$\frac{T'_n(x)}{T_{n-1}(x)}=\frac{n2^{n-1}x^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-1}ka_kx^{k-1}}{2^{n-2}x^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}b_kx^k}=2n+\sum_{k=0}^{n-2}c_kx^k$$

T_n è un polinomio di grado n avente solo potenze della stessa parità di n; quindi T'_n è un polinomio di grado n-1 avente solo potenze della stessa parità di n-1, come pure T_{n-1}; il loro rapporto sarà quindi la somma di un valore costante ($2n$) e di una funzione razionale fratta avente solo termini della stessa parità di n-1. La differenza $D_n(x)=T'_n(x)-2nT_{n-1}(x)$ sarà quindi un polinomio di grado n-3. Per la proprietà di ortogonalità avremo quindi che

$$\langle D_n(x)|T_{n-3}(x)\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{D_n(x)T_{n-3}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0 & n=2k+1\\ n\pi & n=2k\end{cases} \qquad [18.15]$$

Per le funzioni U_n valgono considerazioni analoghe. Con lo stesso cambiamento di variabile [18.12] abbiamo

$U_0=1$; $U_1=2\cos\theta=2\cos\theta\ \sin\theta/\sin\theta=\sin 2\theta/\sin\theta$

$$U_{n+2}(\cos\theta)=2\cos\theta U_{n+1}(\cos\theta)-U_n(\cos\theta)$$

$$U_2(\cos\theta)=\frac{2\cos\theta\sin 2\theta}{\sin\theta}-1=\frac{2\cos\theta\sin 2\theta-\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$$

…

$$U_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \qquad [18.16]$$

Gli zeri di U_n sono quelli di $\sin(n+1)\theta$, che sono pari a $k\pi$ essi sono quindi semplici:

$$\theta_{n0}=\frac{1}{n+1}(k\pi)=\pi\frac{k}{n+1} \qquad [18.17a]$$

$$x=\cos\theta_{n0}=\cos\left(\pi\frac{k}{n+1}\right) \qquad k=0,1,2,\dots,n \qquad [18.17b]$$

In tabella i valori gli zeri dei primi polinomi; di nuovo i valori sono tutti doppi, in quanto preso ciascuno sia col segno “+” che col segno “-“:

	$x_{0,0}$	$x_{1,0}$	$x_{2,0}$	$x_{3,0}$	$x_{4,0}$	$x_{5,0}$
U_2	-	$\frac{1}{2}$				
U_3	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$				
U_4	-	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2^{3/2}}$	$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2^{3/2}}$			
U_5	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$			
U_6	-	$x_{1,0}$	$x_{2,0}$	$x_{3,0}$		
U_7	0	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$		
U_8	-	$x_{1,0}$	$x_{2,0}$	$x_{3,0}$	$x_{4,0}$	
U_9	0	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2^{3/2}}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2^{3/2}}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2^{3/2}}$	$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2^{3/2}}$	
U_{10}	-	$x_{1,0}$	$x_{2,0}$	$x_{3,0}$	$x_{4,0}$	$x_{5,0}$

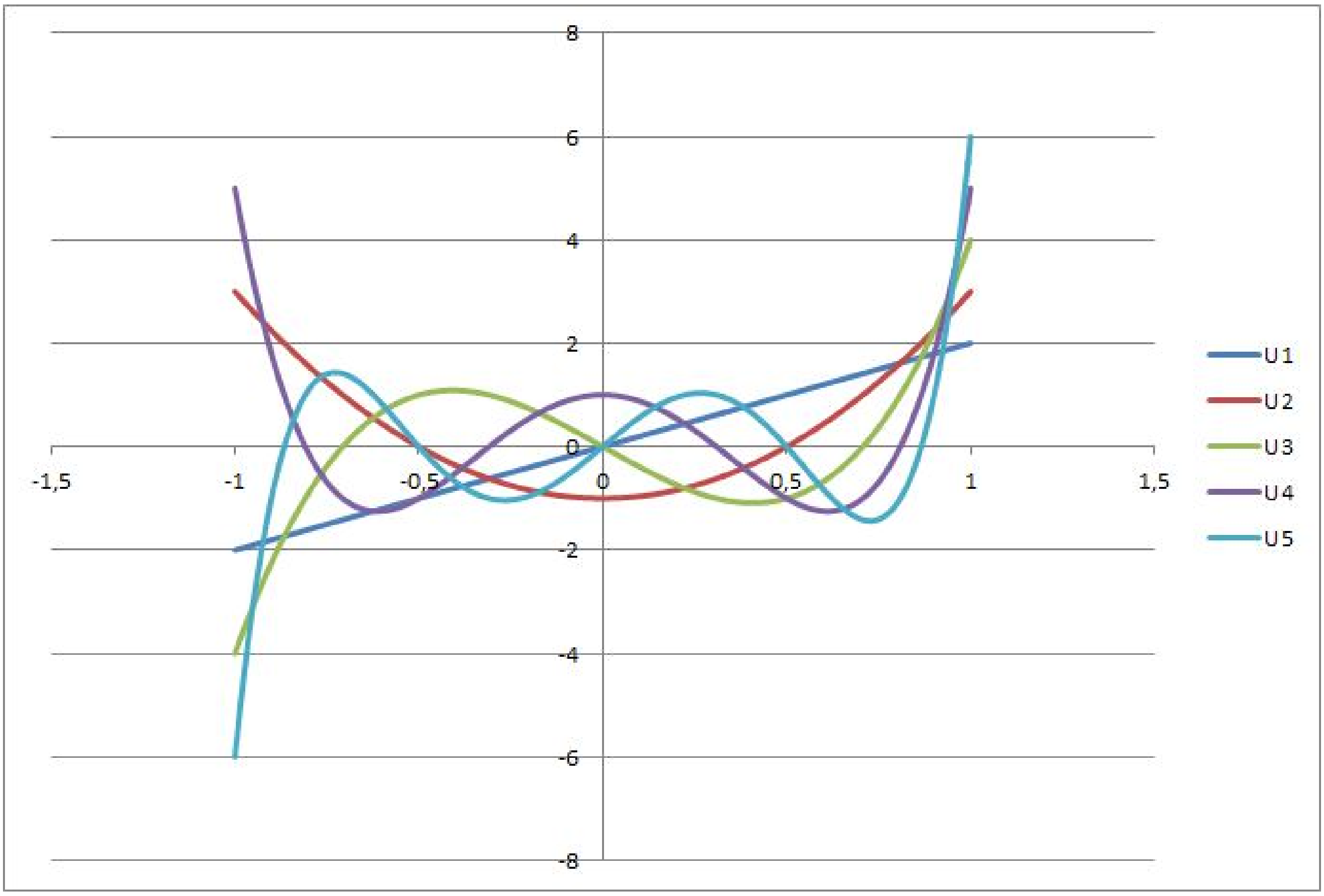
Numericamente

	$x_{0,0}$	$x_{1,0}$	$x_{2,0}$	$x_{3,0}$	$x_{4,0}$	$x_{5,0}$
U_2	-	0,5				
U_3	0	0,707106781				
U_4	-	0,809016994	0,309016994			
U_5	0	0,866025404	0,5			
U_6	-	0,900968868	0,623489802	0,258819045		
U_7	0	0,923879533	0,707106781	0,433883739		
U_8	-	0,939692621	0,766044443	0,555570233	0,173648178	
U_9	0	0,951056516	0,809016994	0,642787610	0,309016994	
U_{10}	-	0,959492974	0,841253533	0,707106781	0,415415013	0,142314838

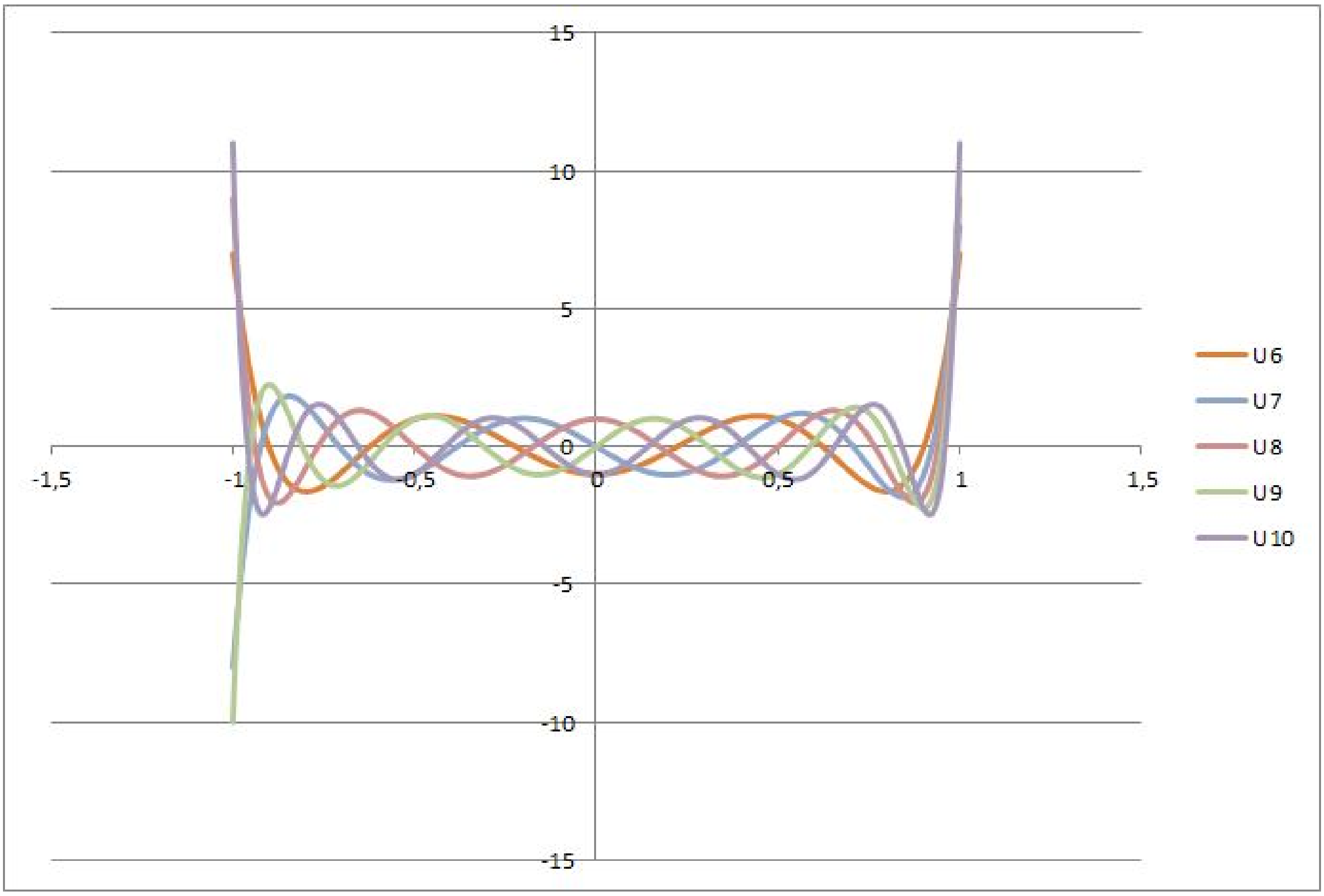
Le differenze prime, colonna per colonna, sono

	$x_{0,0}$	$\Delta x_{1,0}$	$\Delta x_{2,0}$	$\Delta x_{3,0}$	$\Delta x_{4,0}$	$\Delta x_{5,0}$
T_2	-					
T_3	-	0,207106781				
T_4	-	0,101910213				
T_5	-	0,057008409	0,190983006			
T_6	-	0,034943464	0,123489802			
T_7	-	0,022910665	0,083616979	0,160162498		
T_8	-	0,015813088	0,058937662	0,117316568		
T_9	-	0,011363896	0,042972551	0,087785252	0,135368817	
T_{10}	-	0,008436457	0,032236538	0,067075482	0,106398019	0,142314838

Tutte queste proprietà si visualizzano nella rappresentazione grafica:



I polinomi di Chebishev U_n di ordine 1-2-3-4-5



I polinomi di Chebishev U_n di ordine 6-7-8-9-10

Esistono semplici relazioni tra i polinomi di prima e di seconda specie:

$$T_n(x) - U_n(x) = -xU_{n-1}(x)$$

da cui

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x) \qquad [18.18]$$

Incrementando l'indice

$$T_{n+1}(x) = U_{n+1}(x) - xU_n(x)$$

moltiplicando la prima per x e sottraendo

$$xT_n(x) - T_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - x^2U_{n-1}(x) - U_{n+1}(x) = 2xU_n - x^2U_{n-1} - (2xU_n - U_{n-1})$$

quindi

$$xT_n(x) - T_{n+1}(x) = U_{n-1}(x)(1-x^2)$$

$$U_n(x) = \frac{xT_{n+1}(x) - T_{n+2}(x)}{(1-x^2)} \qquad [18.19]$$

Un'ulteriore rappresentazione per i nostri polinomi si ha attraverso il determinante di opportune matrici. Consideriamo $T_2=2x^2-1$, possiamo scrivere

$$T_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}$$

come pure

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

Il comportamento è generale:

$$T_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} \qquad [18.20]$$

infatti, sviluppando secondo l'ultima riga, abbiamo tutti termini nulli eccetto gli ultimi due, che hanno coefficienti 1 e $2x$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots. & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} + 2x\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} + 2xT_{n-1} = -T_{n-2} + 2xT_{n-1}$$

avendo sviluppato il primo determinante di ordine n-1 secondo la penultima riga che ha solo due elementi non nulli (pari ciascuno a 1) nelle ultime due colonne, sviluppando a loro volta questi due minori secondo l'ultima riga, si vede che il primo minore ha l'ultima colonna nulla, mentre l'altro presenta la stessa struttura: i segni si conservano ed il risultato è dimostrato per induzione ($T_1=x$).

Con lo stesso meccanismo si vede che

$$U_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots. & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} \qquad [18.21]$$

Gli autovalori delle matrici T_n e U_n hanno tutti valori complessi e a molteplicità unitaria, tutte le matrici sono quindi diagonalizzabili nel campo complesso.

I discriminanti delle espressioni degli autovalori sono polinomi di grado 2n-2 senza radici reali.

Un accenno infine alle funzioni generatrici.

Per i polinomi di prima specie abbiamo

$$G_1(t) = \frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n \qquad [18.22]$$

Per i polinomi di seconda specie abbiamo

$$G_2(t) = \frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n \qquad [18.23]$$

Deriviamo quest'ultima rispetto a t:

$$\frac{\partial}{\partial t}G_2(t) = \frac{2(t-x)}{\left[1-2xt+t^2\right]^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nU_n(x)t^{n-1}$$

moltiplicando questa per *t* e sottraendo la [18.23]:

$$\frac{2(t-x)t}{\left[1-2xt+t^2\right]^2} - \frac{1}{1-2xt+t^2} = \frac{t^2-1}{\left[1-2xt+t^2\right]^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)U_n(x)t^n \qquad [18.24]$$