5. Occorre mettersi in due

L'equazione

$$x^4 + y^4 = z^2 \qquad [5.1]$$

non ammette soluzioni intere positive. La dimostrazione si basa sul principio della discesa infinita che risale a Fermat e che quindi non riporto qui.

Benchè più complicata, l'equazione

$$x^4 + y^4 = 1 + z^2 \qquad [5.2]$$

ammette soluzioni, ad esempio

$5^4+7^4=1+55^2$

$13^4+13^4=1+239^2$

Anche l'equazione

$$x^4 + y^4 = 2 + z^2 \qquad [5.3]$$

ammette soluzioni quali

$15^4+33^4=2+1112^2$

$121^4+295^4=2+88248^2$

Se invece cerchiamo soluzioni per l'equazione

$$x^2 + y^2 = z^k \qquad [5.4]$$

siamo in grado di trovare espressioni parametriche per le incognite.

Tutto parte dall'identità che esprime il fatto che il prodotto di due somme di due quadrati si può scrivere in due modi diversi come somma di due quadrati:

$$\left(a^2 + b^2\right)\cdot\left(c^2 + d^2\right) = f^2 + g^2$$

esplicitamente

$$\left(m^2+n^2\right)\cdot\left(p^2+q^2\right)=\left(mp+nq\right)^2+\left(mq-np\right)^2 \qquad [5.5a]$$

$$\left(m^2+n^2\right)\cdot\left(p^2+q^2\right)=\left(mp-nq\right)^2+\left(mq+np\right)^2 \qquad [5.5b]$$

Se nella [5.5b] poniamo *m*=*p* e *n*=*q* allora

$$\left(m^2+n^2\right)^2=\left(m^2-n^2\right)^2+\left(2mn\right)^2 \qquad [5.6]$$

che restituisce la soluzione a due parametri dell'equazione di Pitagora per i triangoli rettangoli i cui cateti valgono

$$x=m^2-n^2$$
$$y=2mn$$

e l'ipotenusa

$$z=m^2+n^2$$

Ci ritroviamo immediatamente la soluzione generale dell'equazione [5.4] quando k=2.

Dal fatto che

$$\left(m^2+n^2\right)^3=\left(m^2+n^2\right)^2\cdot\left(m^2+n^2\right)$$

Moltiplichiamo la [5.6] per $\left(m^2+n^2\right)$ e applichiamo la [5.5a]:

$$\begin{aligned}&\left(m^2+n^2\right)^3=\left(m^2+n^2\right)\cdot[\left(m^2-n^2\right)^2+\left(2mn\right)^2]=\\&=[m\left(m^2-n^2\right)+n2mn]^2+[m2mn-n\left(m^2-n^2\right)]^2= \qquad [5.7a]\\&(m^3+mn^2)^2+(m^2n+n^3)^2\end{aligned}$$

Moltiplichiamo la [5.6] per $\left(m^2+n^2\right)$ e applichiamo la [5.5b]:

$$\begin{aligned}&\left(m^2+n^2\right)^3=\left(m^2+n^2\right)\cdot[\left(m^2-n^2\right)^2+\left(2mn\right)^2]=\\&=[m\left(m^2-n^2\right)-n2mn]^2+[m2mn+n\left(m^2-n^2\right)]^2= \qquad [5.7b]\\&(m^3-3mn^2)^2+(3m^2n-n^3)^2\end{aligned}$$

Queste due relazioni forniscono altrettante soluzioni dell'equazione [5.4] per k=3, ossia

$$x^2+y^2=z^3 \qquad \begin{cases} x_1 = m\left(m^2+n^2\right) \\ y_1 = n\left(m^2+n^2\right) \\ z_1 = m^2+n^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_2 = m^3-3mn^2 \\ y_2 = 3m^2n-n^3 \\ z_2 = m^2+n^2 \end{cases} \qquad [5.7]$$

Operando allo stesso identico modo, ovvero moltiplicando la [5.7a] per $\left(m^2+n^2\right)$ e sfruttando la [5.5a] e la [5.5b] e poi la [5.7b] per $\left(m^2+n^2\right)$ ed utilizzando ancora la [5.5a] e la [5.5b] si ottengono facilmente, ma non proprio agevolmente, le due soluzioni nel caso k=4, ossia

$$x^2+y^2=z^4 \qquad \begin{cases} x_1 = m^4-n^4 \\ y_1 = 2mn\left(m^2+n^2\right) \\ z_1 = m^2+n^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_2 = m^4-6m^2n^2+n^4 \\ y_2 = 4mn\left(m^2-n^2\right) \\ z_2 = m^2+n^2 \end{cases} \qquad [5.8]$$

per le quali lascio a voi il compito di effettuare i calcoli.

Riepiloghiamo i risultati sin qui ottenuti: tenendo conto della simmetria del problema in x e y, per la equazione [5.4] abbiamo una soluzione a due parametri per k=2; due soluzioni a due parametri per k=3 e k=4. Il numero di soluzioni aumenta di una unità ogni 2 valori di k, per cui k=5 e k=6 hanno tre soluzioni; k=7 e k=8 hanno quattro soluzioni e così via, di modo che il numero di soluzioni è pari alla parte intera della metà del grado aumentata di uno: [5.(k+1)/2].

Trascrivo ancora solo il caso k=5:

$$x^2+y^2=z^5 \;\rightarrow \begin{cases} x_1 = m\left(m^2+n^2\right)^2 \\ y_1 = n\left(m^2+n^2\right)^2 \\ z_1 = m^2+n^2 \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = m^5-2m^3n^2-3mn^4 \\ y_2 = -n^5+2m^2n^3+3m^4n \\ z_2 = m^2+n^2 \end{cases} ; \begin{cases} x_3 = m^5-10m^3n^2+5mn^4 \\ y_3 = -n^5-10m^2n^3+5m^4n \\ z_3 = m^2+n^2 \end{cases}$$

[5.9]

È ovvio che il valore di x, y per un dato grado k si può considerare assoluto, poiché essi vanno elevati al quadrato.

Se cambiamo il segno alla y_2 e alla y_3 della [5.9] abbiamo:

$$x_2+y_2 = m^5-3m^4n-2m^3n^2-2m^2n^3-3mn^4+n^5$$

$$x_3 + y_3 = m^5 + 5m^4 n - 10m^3 n^2 - 10m^2 n^3 + 5mn^4 + n^5$$

Le espressioni hanno uno sviluppo simmetrico e il modulo della somma dei coefficienti è in entrambi i casi pari a 8. In effetti esso è nullo se non cambiamo di segno ad una delle due variabili. In ogni caso, la somma dei coefficienti di ciascuna delle soluzioni vale ±4.

Utilizzando come semi, i valori, m=3, n=2 abbiamo, ad esempio

$5^2 + 12^2 = 13^2$

$39^2 + 26^2 = 13^3$; $9^2 + 46^2 = 13^3$

$65^2 + 156^2 = 13^4$; $119^2 + 120^2 = 13^4$

$507^2 + 338^2 = 13^5$; $117^2 + 598^2 = 13^5$; $597^2 + 122^2 = 13^5$

Se abbiamo un insieme di soluzioni ($x_{i,k}$, $y_{i,k}$) valido per un dato valore k, allora abbiamo che

$$\left(m^2 + n^2\right)\left(x_{i,k}{}^2 + y_{i,k}{}^2\right) = \left(mx_{i,k} + ny_{i,k}\right)^2 + \left(my_{i,k} - nx_{i,k}\right)^2 \qquad [5.10a]$$

$$\left(m^2 + n^2\right)\left(x_{i,k}{}^2 + y_{i,k}{}^2\right) = \left(mx_{i,k} - ny_{i,k}\right)^2 + \left(my_{i,k} + nx_{i,k}\right)^2 \qquad [5.10a]$$

ovvero

$$\begin{cases} x_{i,k+1} = mx_{i,k} + ny_{i,k} \\ y_{i,k+1} = my_{i,k} - nx_{i,k} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{j,k+1} = mx_{i,k} - ny_{i,k} \\ y_{j,k+1} = my_{i,k} + nx_{i,k} \end{cases} \qquad [5.10]$$

con l'avvertenza che alcune soluzioni, così generate, coincidono ovvero scambiano tra loro le incognite, ed il numero complessivo di soluzioni effettivamente differenti tra loro si mantiene quello già visto.

Nell'esempio precedente, dati m=3, n=2 abbiamo che dalla soluzione x_2=(5, 12) si ottiene

$$\begin{cases} x_{1,2} = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 12 = 39 \\ y_{1,2} = 3 \cdot 12 - 2 \cdot 5 = 26 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{2,2} = \left|3 \cdot 5 - 2 \cdot 12\right| = 9 \\ y_{2,2} = 3 \cdot 12 + 2 \cdot 5 = 46 \end{cases}$$

L'ulteriore passaggio porta a

$$\begin{cases} x_{i,k+2} = mx_{i,k+1} + ny_{i,k+1} = m(mx_{i,k} + ny_{i,k}) + n(my_{i,k} - mx_{i,k}) = m(m-n)x_{i,k} + 2mny_{i,k} \\ y_{i,k+2} = my_{i,k+1} - nx_{i,k+1} = m(my_{i,k} - nx_{i,k}) - n(mx_{i,k} + ny_{i,k}) = m(m+n)y_{i,k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{j,k+2} = mx_{i,k+1} - ny_{i,k+1} = m(mx_{i,k} + ny_{i,k}) - n(my_{i,k} - mx_{i,k}) = m(m+n)x_{i,k} \\ y_{j,k+2} = my_{i,k+1} + nx_{i,k+1} = m(my_{i,k} - nx_{i,k}) + n(mx_{i,k} + ny_{i,k}) = (m+n)(m-n)y_{i,k} \end{cases}$$

assieme a

$$\begin{cases} x_{i,k+2} = mx_{i,k+1} - ny_{i,k+1} = m(mx_{i,k} + ny_{i,k}) - n(my_{i,k} - mx_{i,k}) = m(m-n)x_{i,k} \\ y_{i,k+2} = my_{i,k+1} + nx_{i,k+1} = m(my_{i,k} - nx_{i,k}) + n(mx_{i,k} + ny_{i,k}) = (m^2 + n^2)y_{i,k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{j,k+2} = mx_{i,k+1} - ny_{i,k+1} = m(mx_{i,k} - ny_{i,k}) - n(my_{i,k} + mx_{i,k}) = m(m-n)x_{i,k} - 2mny_{i,k} \\ y_{j,k+2} = my_{i,k+1} + nx_{i,k+1} = m(my_{i,k} + nx_{i,k}) + n(mx_{i,k} - ny_{i,k}) = 2mnx_{i,k} + (m+n)(m-n)y_{i,k} \end{cases}$$

Utilizziamo come semi i valori più piccoli possibili m=1, n=2; si ottiene la ricorrenza

$$\begin{cases} x_{i,k+1} = 2x_{i,k} + y_{i,k} \\ y_{i,k+1} = 2y_{i,k} - x_{i,k} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{j,k+1} = 2x_{i,k} - y_{i,k} \\ y_{j,k+1} = 2y_{i,k} + x_{i,k} \end{cases}$$

che applichiamo subito:

a	$3^2 + 4^2 = 5^2$			
b	$5^2 + 10^2 = 5^3$;	$2^2 + 11^2 = 5^3$		
c	$15^2 + 20^2 = 5^4$;	$7^2 + 24^2 = 5^4$		
d	$50^2 + 25^2 = 5^5$;	$10^2 + 55^2 = 5^5$;	$38^2 + 41^2 = 5^5$	
e	$75^2 + 100^2 = 5^6$;	$35^2 + 120^2 = 5^6$;	$44^2 + 117^2 = 5^6$	
f	$125^2 + 250^2 = 5^7$;	$50^2 + 275^2 = 5^7$;	$190^2 + 205^2 = 5^7$;	$29^2 + 278^2 = 5^7$;
g	$375^2 + 500^2 = 5^8$;	$175^2 + 600^2 = 5^8$;	$220^2 + 585^2 = 5^8$;	$336^2 + 527^2 = 5^8$;

Per ciascuna equazione tutte le soluzioni sono multiple di 5 eccetto una. Tali sequenze di soluzioni prime tra loro sono:

x: {3, 2, 7, 38, 44, 29, 336, 718, 237, 2642, 10296, 8839, 16124, 108691, 164833, 24478, 922077, 2521451, 1476984, 6699319, …}

y: {4, 11, 24, 41, 117, 278, 527, 1199, 3116, 6469, 11753, 33802, 76443, 136762, 354144, 873121, 1721764, 3565918, 9653287, 20783558, …}

ad esempio è

$$6699319^2 + 20783558^2 = 5^{21}$$

Questa proprietà è sempre vera: dato il valore z, per ciascun grado tutte le soluzioni sono multiple di z tranne una, che chiamo soluzione particolare. In tabella mostro la più piccola soluzione particolare nel caso k=3 per bassi valori di m, n ciascuna appartiene al valore $z=m^2+n^2$:

m, n	1	2	3	4	5	6	7
2	(2,11)						
3	(18, 26)	(9, 46)					
4	(47, 52)	(16, 88)	(44, 117)				
5	(74, 110)	(65, 142)	(10, 198)	(115, 236)			
6	(107, 198)	(144, 208)	(54, 297)	(72, 368)	(234, 415)		
7	(146, 322)	(259, 286)	(154, 414)	(7, 524)	(182, 610)	(413, 666)	
8	(191, 488)	(376, 416)	(296, 549)	(128, 704)	(88, 835)	(352, 936)	(664, 1001)

Le due soluzioni non sono mai contemporaneamente quadrati perfetti.