2. Tra i due litiganti

Un problemino classico recita così: «*Due persone distano tra loro 2 km; ad un certo momento si muovono per venirsi incontro in linea retta, procedendo alla velocità costante di 1 km/h; una farfalla, posata sulla spalla di uno dei due, spicca il volo in quello stesso momento, e si dirige verso l'altro, procedendo alla velocità costante di 10 km/k. Raggiunta l'altra persona inverte istantaneamente la rotta e, sempre mantenendo la stessa velocità, raggiunge di nuovo la prima persona, ne tocca la spalla e inverte ancora la rotta dirigendosi verso la seconda persona e così via, fino a che tutti e tre (le due persone e la farfalla) raggiungono contemporaneamente lo stesso punto. Quanti km ha percorso la farfalla?*»

Naturalmente dobbiamo supporre i tre esseri puntiformi, le traiettorie perfettamente rettilinee e cose del genere.

Le figure mostrano il problema:

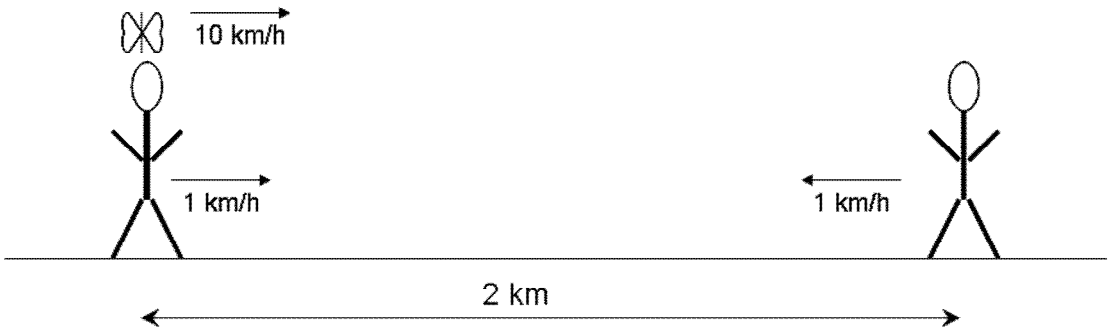
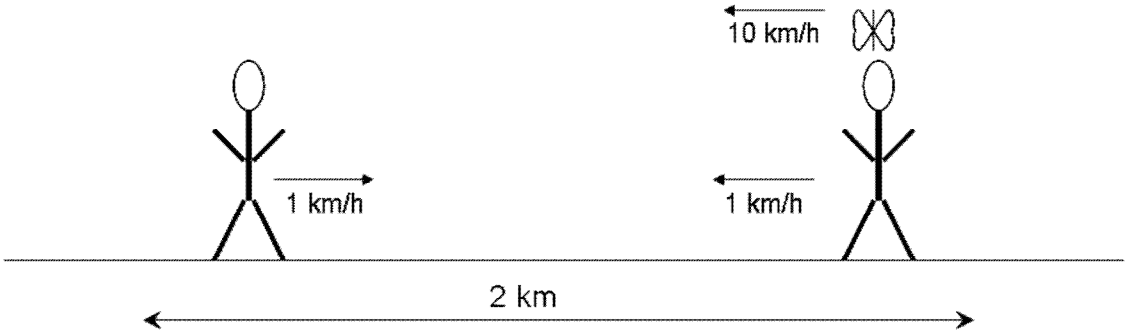


Fig. 1: Situazione iniziale



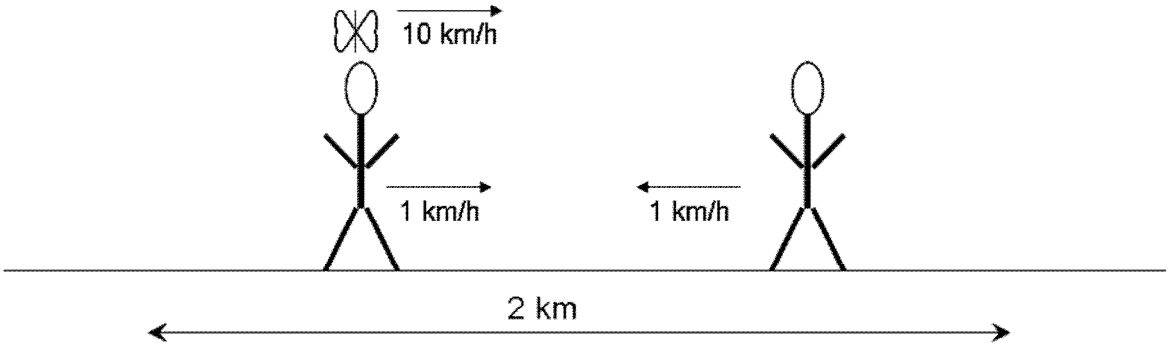


Fig. 2: Situazioni intermedie

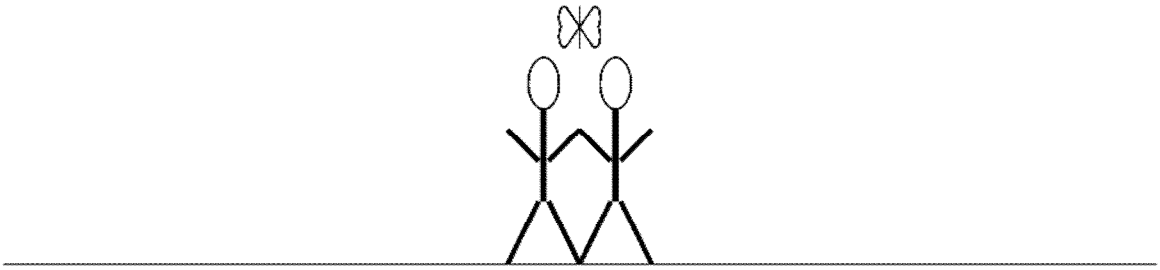


Fig. 3: Situazione finale

Naturalmente il problema si può risolvere in diversi modi. Un possibile approccio analitico consiste nel calcolare, data la velocità della farfalla e quella di ciascuna delle persone, il primo punto di incontro. Se definiamo come asse ***x*** la retta che congiunge le due persone, con origine nella posizione iniziale della persona a sinistra nella figura, con x la distanza lungo la retta da tale punto, indicando con v_1=1 la velocità delle persone e con v_2=10 la velocità della farfalla, abbiamo che l'ascissa del primo incontro della farfalla con la persona a destra nella figura avviene all'istante t tale che:

- la prima persona ha percorso la distanza $v_1 t$ e si trova pertanto nella posizione $v_1 t$
- la seconda persona ha percorso la distanza $v_1 t$ e si trova pertanto nella posizione 2- $v_1 t$
- la farfalla ha percorso la distanza $v_2 t$ e si trova pertanto nella posizione $v_2 t$

di conseguenza, poiché la posizione della seconda persona è identica a quella della farfalla nell'istante t, avremo che

$$t = \frac{2}{v_1 + v_2}$$

e che il primo punto di incontro si trova alla posizione

$$x = \frac{2v_1}{v_1 + v_2}$$

Nel nostro caso t=2/11 di ora e x=2/11 di kilometro, mentre la farfalla ha percorso 20/11 di kilometro. Ora occorre ricominciare e impostare le nuove equazioni per il secondo incontro. La nuova distanza tra le persone è 2-2/11 di kilometro e bisogna ricominciare daccapo. I passi da fare sono infiniti (ricordiamo il paradosso di Zenone), e se siamo bravi riusciamo ad impostare una sequenza infinita di equazioni, che conducono ad una serie geometrica, di cui occorre fare la somma per ottenere il percorso complessivo del nostro lepidottero .

Se invece assumiamo un approccio sintetico (direi "integrale") possiamo ragionare come segue. Le persone si incontreranno necessariamente a metà strada, perché hanno la stessa velocità; quindi ciascuna di loro percorre 1 km e l'incontro avviene dopo 1 ora dalla partenza, perché viaggiano entrambi a 1 km/h. Ma in 1 ora la farfalla percorre 10 km perché la sua velocità è di 10 km/h. Ed il problema è risolto in poche righe e praticamente senza quasi fare calcoli.

Complichiamoci un po' la vita e schematizziamo il seguente problema poniamo due persone a distanza di 6 unità, esse si incamminano a velocità costante unitaria lungo una linea retta, verso lo stesso punto situato sull'asse del segmento che le unisce, distante 5 unità da ciascuno di essi. Un cagnolino, che viaggia sempre in linea retta alla velocità costante k, parte contemporaneamente dallo stesso posto occupato da una delle due persone e si dirige verso la congiungente il tragitto tra l'altra persona e il comune punto finale di arrivo. Quando incontra l'altra persona cambia rotta e si dirige sempre in linea retta verso la prima persona, incontrandola lungo il tragitto verso la meta finale; nell'istante in cui lo incontra cambia di nuovo rotta e si dirige di nuovo verso l'altra persona e così via, finché tutti e tre giungono allo stesso punto.

Questa volta non ci facciamo la stessa domanda, perché già conosciamo la risposta: ciascuna persona percorre la distanza di 5 unità spaziali, impiegando 5 unità di tempo, durante le quali il cane percorre $5k$ unità spaziali. La domanda è un'altra: descrivere le caratteristiche complete del moto del cane.

Con l'aiuto di una figura formalizziamo il problema.

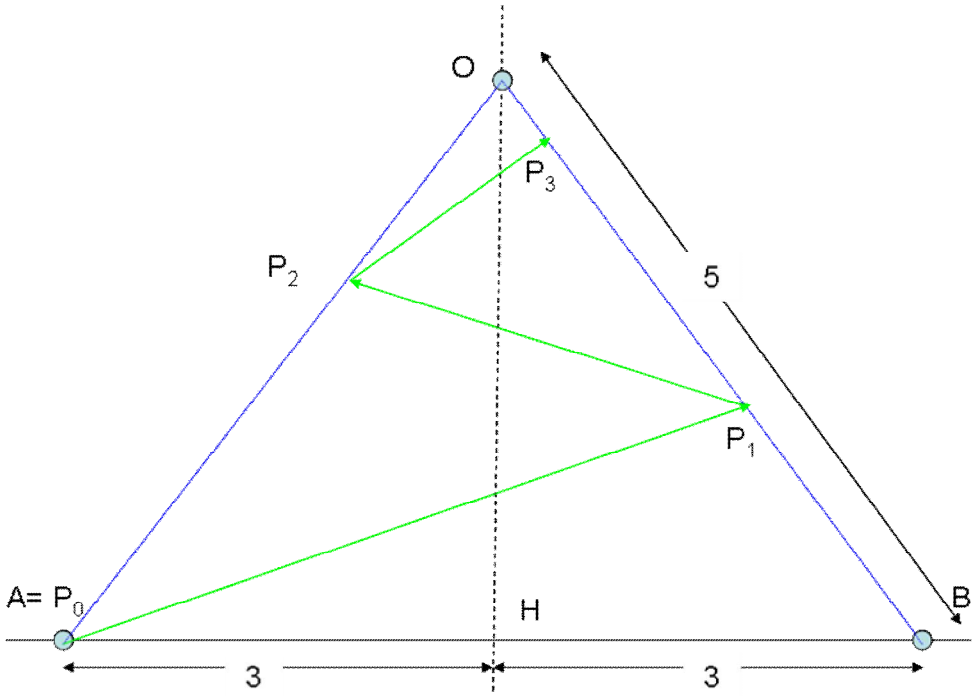


Figura 1

Innanzitutto le notazioni: il cane incontra le persone lungo il loro tragitto nei punti P_n: quando n è pari incontra la prima persona (quella assieme alla quale è partita), quando n è dispari incontra l'altra persona. Indichiamo la lunghezza del segmento percorso dalla persona che parte da B con $s(t)$.

Concentriamoci sul primo incontro in P_1. Indichiamo con x la distanza tra il piede dell'asse del segmento AB e la proiezione di sul segmento AB stesso, ossia la lunghezza HM e con s la distanza dal punto B a P_1, la distanza percorsa dal cane dalla partenza al primo incontro sarà naturalmente ks (vedi figura 2).

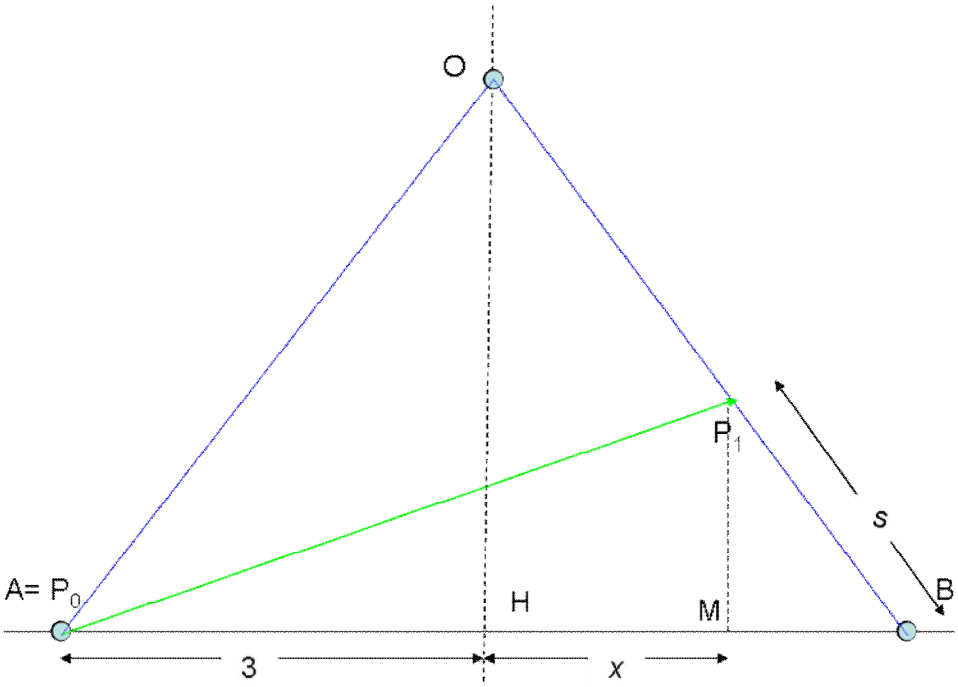


Figura 2

Una considerazione innanzitutto. Se k=1, ossia il cane ha la stessa velocità delle due persone, il primo punto di incontro è direttamente in O. Se k<1 il cane è più lento della persona B che quindi raggiunge O senza che il cane la intercetti: deve quindi essere $k \geq 1$ e l'incontro avviene all'interno del segmento BO, in un punto che dipende dal rapporto k tra la velocità del cane e delle persone.

Il quadrato della lunghezza del segmento MP_1 si può esprimere guardandolo come cateto del triangolo MAP_1 o del triangolo MBP_1 per cui

$$k^2 s^2 - (3+x)^2 = s^2 - (3-x)^2 \qquad [2.1]$$

da cui

$$x = \frac{s^2(k^2-1)}{12} \qquad [5 \geq s]$$

Applicando il teorema di Pitagora generalizzato al triangolo ABP_1, i cui lati sono lunghi 6; ks; s impostiamo la seguente ulteriore relazione

$$AB^2 = AP_1^2 + BP_1^2 - 2AP_1 \cdot BP_1 \cdot \cos(\hat{P_1})$$

poi svolgete i calcoli, sfruttando il teorema di addizione dei seni, ed avrete il risultato. Ma, molto più semplicemente, basta osservare che, per la similitudine dei triangoli BHO e BMP_1 abbiamo pure

$$3s = 5(3 - x) \qquad [2.2]$$

Eliminando il parametro x tra le [2.1] e [2.2] abbiamo infine

$$s = \frac{6\sqrt{25k^2 - 16} - 18}{5k^2 - 5} \qquad [2.3]$$

con

$$x = 3 - \frac{3s}{5} \qquad [2.4]$$

Abbiamo risolto la prima parte del problema. La [2.3] è singolare in k=1 perché in effetti il triangolo ABP_1 degenera nel triangolo AOB. L'andamento di $s(k)$ è mostrato in figura

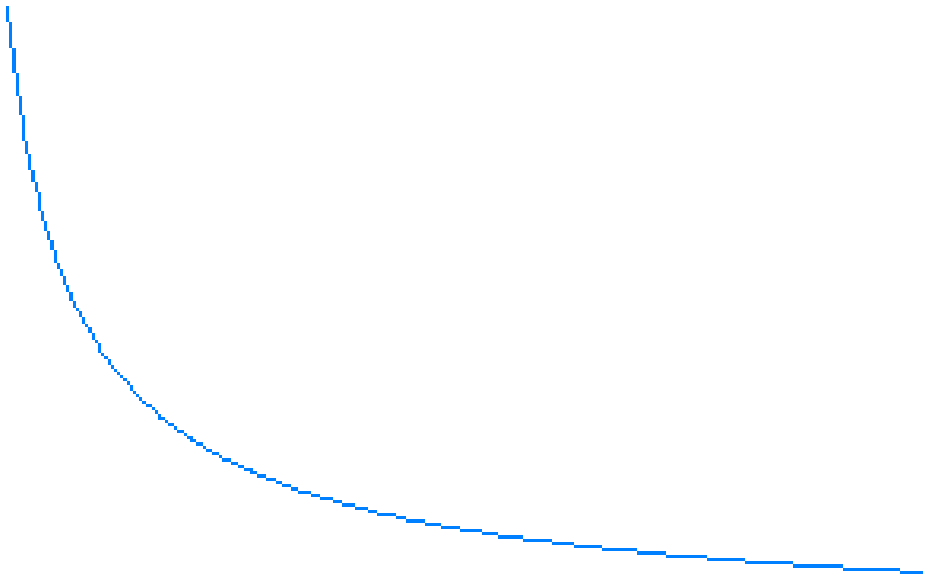


Figura 3: s in funzione di k

In effetti al crescere di k il cane raggiunge B più vicino al suo punto di partenza e quindi s tende a 0; asintoticamente $s \approx 6/k$.

Quando k è molto prossimo a 1 l'andamento è $s \approx 5 - 125\varepsilon/18$ quando $k = 1 + \varepsilon$.

Sappiamo però che abbiamo appena cominciato, e dovremmo ripartire dal punto P1 e fare gli stessi calcoli per trovare la lunghezza del segmento P_1P_2.

Ma prima di partire a capo basso osserviamo nuovamente la figura

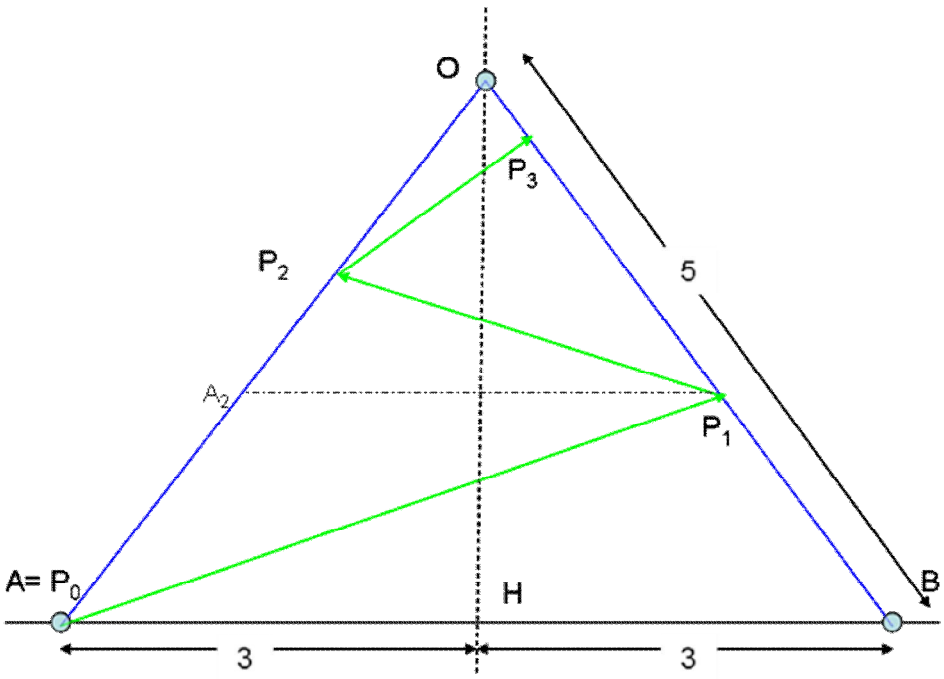


Figura 4: la spezzata

dove ho tratteggiato la parallela ad AB passante per P_1. Il triangolo OA_2P_1 è simile al triangolo di partenza OAB, per cui tutte le relazioni già viste si mantengono identiche, sono semplicemente scalate di un fattore $x/3$. Quindi la lunghezza del segmento P_1P_2 è pari a $x/3$ volte la lunghezza del segmento P_1P_2 e così per tutte le altre grandezze.

La spezzata $P_0P_1P_2P_3\ldots P_n$ misura quindi una lunghezza pari a

$$P_0P_1\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=\frac{3P_0P_1}{3-x} \qquad [2.5]$$

dove $P_0P_1=ks$, s è dato da [2.3] e x è dato da [2.4]. Senza fare calcoli sappiamo che la [2.5] vale esattamente $5k$, infatti

$$\frac{3ks}{3-x}=\frac{3ks}{3-\left(3-\frac{3s}{5}\right)}=\frac{3ks}{\frac{3s}{5}}=5k$$

Ed ora alcune questioni. Per quale valore di k la traiettoria del cane è perpendicolare a quella delle persone? Deve essere

$$36=(k^2+1)s^2$$

che dà luogo ad una equazione di sesto grado in k, la soluzione che ci interessa è

$$\frac{\sqrt{3^{1/6}\left(17496\sqrt{97886}+15024635\sqrt{3}\right)^{2/3}+170\,3^{1/3}\left(17496\sqrt{97886}+15024635\sqrt{3}\right)^{1/3}+59977\sqrt{3}}}{3\,3^{2/3}\sqrt{5}\left(17496\sqrt{97886}+15024635\sqrt{3}\right)^{1/6}}$$

pari a k=2.212833459444036…

Inoltre

s=1 per k=5.458937625582472 ($\sqrt{149}/\sqrt{5}$)

s=2 per k=2.529822128134704 ($\sqrt{32}/\sqrt{5}$)

s=3 per k=1.612451549659710 ($\sqrt{13}/\sqrt{5}$)

s=4 per k=1.204159457879229 ($\sqrt{7{,}25}/\sqrt{5}$)

I valori interi di k forniscono

k	s
1	5
2	2,466060556
3	1,718524844
4	1,327673435
5	1,083896268
6	0,916530428
7	0,794266933
8	0,700942809
9	0,627328045
10	0,567754463

Si hanno valori razionali di k/s invece come rappresentato nello schema

k/s	k
1	2,233964303613104
2	3,223504675322112
3	3,991069864214488
4	4,640891943427903
5	5,214699023475199
6	5,734200234390730
7	6,212398770780404
8	6,657813124863105
9	7,076383195633917
10	7,472446348489862