19. Moria di conigli

L'originale del problema riportato da Leonardo Pisano, figlio di Guglielmo dei Bonacci e quindi detto Fibonacci, recitava così:

> *Qvidam posvit vnvm par cvnicvlorvm in qvodam loco, qvi erat vndiqve pariete circvndatvs, vt sciret, qvot ex eo paria germinarentvr in vno anno: cvm natvra eorvm sit per singvlvm mensem alivd par germinare; et in secvndo mense ab eorvm nativitate germinant.*

o, meglio per noi,

> Un tale mise una coppia di conigli in un luogo da ogni parte circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per loro natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita.

[*Liber abaci*, XII - De Regulis Erractis]

La soluzione è ben nota, ed è rappresentata, al periodo n, dal corrispondente numero di Fibonacci F_n. In effetti la soluzione è tale se si assume che nessun coniglio muoia durante il periodo considerato.

Ben più articolato il caso il cui assumiamo che la coppia di conigli non sia perenne, ma muoia dopo k periodi, con $2<k<n$. Diciamo che la soluzione sarà definita quando troviamo il numero $F_n(k)$ delle coppie di conigli presenti nel recinto al periodo n se essa vive per k periodi. Naturalmente $F_n(k) = F_n$ quando $k \geq n$.

Cominciamo con qualche semplice considerazione.

Se $k=n-1$, cioè se la coppia muore all'ultimo periodo, allora al periodo n saranno sopravvissute tutte eccetto quella morta e quella non nata da essa, per cui

$$F_n(n-1) = F_n - 2 \qquad [19.1]$$

Se $k=n-2$, cioè se la coppia muore al penultimo periodo, allora al periodo n saranno sopravvissute tutte eccetto quella morta e quella non nata da essa e quella non nata nel penultimo periodo, per cui

$$F_n(n-2) = F_n - 3 \qquad [19.2]$$

Quando $k=n-3$, cioè se la coppia muore al terzultimo periodo, allora al periodo n saranno sopravvissute tutte eccetto le due morte, le tre non nate da esse e quelle non nate dai due figli più vecchi, per cui

$F_n(n\text{-}2) = F_n\ \text{-}7$ [19.3]

Prima di procedere con l'analisi riporto la tabella dei valori tabulati per $F_n(k)$: le colonne rappresentano il periodo n osservato, le righe la durata k della vita

	n																													
k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
3	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
4				3	3	5	6	8	11	14	19	25	33	44	58	77	102	135	179	237	314	416	551	730	967	1281	1697	2248	2978	3945
5					5	6	10	14	21	30	45	65	96	140	206	301	442	647	949	1390	2038	2986	4377	6414	9401	13777	20192	29592	43370	63561
6						8	11	18	27	42	64	98	151	231	355	544	835	1281	1965	3015	4625	7096	10886	16701	25622	39308	60305	92517	141936	217752
7							13	19	31	48	76	119	187	293	461	723	1136	1783	2800	4396	6903	10838	17018	26720	41955	65875	103434	162406	255002	400390
8								21	32	52	82	131	208	331	526	836	1330	2114	3362	5345	8499	13513	21486	34163	54319	86368	137325	218348	347174	552009
9									34	53	86	137	220	352	564	903	1446	2315	3708	5937	9508	15225	24381	39042	62520	100116	160321	256729	411113	658334
10										55	87	141	226	364	585	941	1513	2433	3912	6290	10115	16264	26153	42053	67621	108733	174841	281141	452070	726921
11											89	142	230	370	597	962	1551	2500	4030	6496	10471	16878	27207	43855	70692	113950	183680	296079	477259	769308
12												144	231	374	603	974	1572	2538	4097	6614	10677	17236	27824	44916	72509	117051	188957	305034	492419	794915
13													233	375	607	980	1584	2559	4135	6681	10795	17442	28182	45535	73573	118875	192073	310341	501434	810191
14														377	608	984	1590	2571	4156	6719	10862	17560	28388	45893	74192	119941	193900	313464	506756	819236
15															610	985	1594	2577	4168	6740	10900	17627	28506	46099	74550	120560	194966	315293	509882	824565
16																987	1595	2581	4174	6752	10921	17665	28573	46217	74756	120918	195585	316359	511711	827693
17																	1597	2582	4178	6758	10933	17686	28611	46284	74874	121124	195943	316978	512777	829522
18																		2584	4179	6762	10939	17698	28632	46322	74941	121242	196149	317336	513396	830588
19																			4181	6763	10943	17704	28644	46343	74979	121309	196267	317542	513754	831207
20																				6765	10944	17708	28650	46355	75000	121347	196334	317660	513960	831565
21																					10946	17709	28654	46361	75012	121368	196372	317727	514078	831771
22																						17711	28655	46365	75018	121380	196393	317765	514145	831889
23																							28657	46366	75022	121386	196405	317786	514183	831956
24																								46368	75023	121390	196411	317798	514204	831994
25																									75025	121391	196415	317804	514216	832015
26																										121393	196416	317808	514222	832027
27																											196418	317809	514226	832033
28																												317811	514227	832037
29																													514229	832038
30																														832040

Generalizziamo ulteriormente la questione. Abbiamo supposto, con Leonardo, che la coppia diventa fertile e genera una nuova coppia a partire dal secondo periodo. È naturalmente lecito chiedersi cosa capita se la coppia diventa fertile a partire dal periodo f; il numero cercato sarà allora esprimibile come

$\mathrm{F}_n(k; f)$

Cominciamo dal caso semplice in cui k=n. Vi sarà una sola coppia per tutti i periodi n<f, quando n=f si genera una nuova coppia; il periodo successivo vede presenti la coppia originale, quella appena nata e una neonata; così via fino a quando anche la prima coppia generata (non quella originaria) comincia a generare la propria coppia mista di cuccioli, il che avviene al periodo n=2f; nel frattempo sono nate f coppie da quella originale, e così via.

In formule, il numero di coppie è dato dalla formula per ricorrenza

$\mathrm{F}_n(n; f) = a_n = a_{n-1} + a_{n-\mathrm{f}}$ $\quad a(1)=a(2)=\ldots=a(f-1)=1$ [19.4]

Per inciso la sequenza [19.4] ammette come funzione generatrice

$$G(x;f) = \frac{1}{1-x-x^{f}} \qquad \textbf{[19.5]}$$

Abbiamo quindi trovato l'espressione generale del numero di coppie di conigli presenti al periodo n, che diventano feconde dopo $f<n$ periodi e che non muoiono mai.

AGGIUSTARE

La domanda di carattere generale è la seguente: data una coppia di conigli, che genera una nuova coppia dopo f periodi che diventa a sua volta fertile nello stesso tempo: qual è la popolazione R di coppie presente al periodo n-simo se la durata della vita è di $k=n-m$ periodi? Bene, con ragionamento analogo a quanto visto la soluzione è data dalla seguente espressione per ricorrenza:

$$\begin{aligned} &R_n(f;m) = R_{n-1-m}(f;m) + R_{n-m-f}(f;m) && n>f \\ &R_n(f;m) = 1 && n\leq f \end{aligned} \qquad [19.6]$$

Fino a quando non sono trascorsi almeno f periodi vi è una sola coppia di conigli. Successivamente il numero di coppie è uguale alla somma del termine immediatamente precedente e di quello f posti precedente, il tutto traslato di $m=n-k$ unità all'indietro per tener conto della limitatezza della vita (k<n).

Alcuni casi rendono più chiaro il discorso.

Soluzione

$f=1$ fino a che il periodo non supera la lunghezza k della vita 2n, altrimenti la somma dei precedenti $(k-1)$ termini, ossia di $(k-1)$ termini a partire da $n-1$ simo.

$f=2$ fino a che il periodo non supera la lunghezza k della vita F_n, altrimenti la somma di $(k-2)$ termini il precedente [ossia $f=2$ termini a partire da $n-1=n-(f-1)$] e gli altri a partire dal precedente il precedente: $R(n-1)+ [R(n-2)+\ldots.\ k-3$ termini]

$f=3$ fino a che il periodo non supera la lunghezza k della vita R_f (ossia f termini a partire dall'anteprecedente ossia da $n-2$) [ossia $f=3$ termini a partire da $n-2=n-(f-1)$], altrimenti la somma di $(k-3)$ termini a partire dal $n-f$ esimo indietro].

f=4 fino a che il periodo non supera la lunghezza k della vita R_f (ossia f =4 termini a partire da n-3=n-(f-1)], altrimenti la somma di (k-f=k-3) termini a partire dal n-f esimo indietro].

f=f fino a che il periodo non supera la lunghezza k della vita R_f ossia f termini a partire da n-(f-1), altrimenti la somma di (k-f) termini a partire dal (n-f)-esimo indietro.

$$\begin{cases} R_n = \sum_{j=0}^{f-1} R_{n-(f-1)-j} & n \le k \\ R_n = \sum_{j=0}^{k-f-1} R_{n-f-j} & n > k \end{cases} \qquad\qquad f<k-1$$

Naturalmente se se $f \ge k$ allora R_n=0 (infatti se la coppia muore prima di diventare fertile essa si estingue). Se invece f=k-1 la popolazione è stabile: vale 2 solo quando nel periodo immediatamente successivo ad un multiplo di f (momento della nascita della coppia nuova) altrimenti vale 1.

Un'ultima (?) osservazione: abbiamo sempre parlato di conigli, ma mi sembra riduttivo limitarne la prolificità ad una sola coppia. Cosa succede se il parto genera p coppie anziché una sola? Bene, rispetto alla [19.4], al periodo k=n avremo, come è facile attendersi, che al numero di elementi del periodo precedente, se ne aggiungono p volte quelli presenti al periodo antecedente, quindi

$$F_{n;p}(n;f) = a_n=a_{n-1}+p\cdot a_{n-f} \qquad a(1)=a(2)=\ldots=a(f-1)=1 \qquad [19.7]$$

con relativa funzione generatrice

$$G_p(x;f) = \frac{1}{1-x-px^f} \qquad [19.8]$$

In quanto ricorsiva, la funzione $F_{n;p}$ ammette limite finito del rapporto asintotico della popolazione a tempo infinito; tale limite corrisponde alla soluzione positiva dell'equazione caratteristica

$x^f - x^{f-1} - p = 0$ [19.9]

il valore della soluzione decresce con f e cresce con p: più tarda il momento della maturità generativa più lentamente cresce la popolazione, che invece aumenta con il numero di coppie procreate.

Tale rapporto limite può assumere valori interi. Vediamo quando e come.

Quando f=2 (il Fibonacci classico), l'equazione caratteristica è

$x^2 - x - p = 0$

che ha soluzione intera positiva quando $4p+1$ è un quadrato perfetto s^2, con $s=2t-1$ dispari. Allora la soluzione sarà

$$\begin{cases} x = t \\ p = t(t-1) \end{cases} \qquad [19.10]$$

Quando f=3, l'equazione caratteristica è

$x^3 - x^2 - p = 0$

che ha soluzione intera positiva quando $p=t^2(t-1)$. Allora la soluzione è

$$\begin{cases} x = t \\ p = t^2(t-1) \end{cases} \qquad [19.11.1]$$

Quando f=4, l'equazione caratteristica è

$x^4 - x^3 - p = 0$

che ha la seguente soluzione intera ad un parametro

$$\begin{cases} x = t \\ p = t^3(t-1) \end{cases} \qquad [19.11.2]$$

Abbiamo capito: nel caso generale l'equazione caratteristica [19.9] assume soluzione intere t quando

$$\begin{cases} x = t \\ p = t^{f-1}(t-1) \end{cases} \qquad [19.11]$$

In tal caso il numero delle coppie di conigli al periodo N+1 è asintoticamente multiplo secondo il fattore t intero del numero del periodo precedente N.

Alla stessa conclusione si giunge osservando semplicemente che la forma delle [19.11] è

$$x^{f}-x^{f-1}-p = x^{f-1}(x-1) = p$$

per cui p deve avere lo stesso aspetto del primo membro.