15. Sulle cifre

Il presente capitolo è un omaggio alle cifre. Che i numeri siano fatti di cifre lo sappiamo un po' tutti, ecco alcune curiosità frutto di ispezioni dirette (forza bruta!) nel nostro mondo.

- **Sui quadrati**

Ci sono 362880 permutazioni delle nove cifre, quindi altrettanti numeri interi composti delle nove cifre significative tutte diverse tra loro su un totale di 900000000 di numeri composti di 9 cifre qualunque esse siano.

Poiché la radice quadrata di 100000000 è 10000 e la radice di 999999999 è 31622,7… tra quei 900000000 numeri vi sono naturalmente 21623 quadrati perfetti. Vi sono inoltre 535 cubi, 78 quarte potenze; 24 quinte potenze; 10 seste potenze; 6 settime potenze; 4 ottave potenze; 2 none potenze (ossia 134217728 e 387420489) ed una sola decima potenza (282475249), come una sola undicesima (362797056) ed una sola dodicesima (244140625). Non ci sono potenze superiori.

Tra i quasi 363mila numeri composti da 9 cifre tutte diverse tra loro (con una frequenza quindi di 63 ogni 156250 ovvero poco più di 4 ogni 10000) i quadrati perfetti sono "solo" i 30 riportati nella tabella, nella cui ultima colonna è riportata la differenza tra le radici quadrate consecutive – il valore 715 è ricavato rispetto alla parte intera della radice di 123456789). Nel prosieguo, in grassetto sono evidenziate le radici palindrome.

	Numero	Radice	Diff. Radice
1	139854276	11826	*715*
2	152843769	12363	537
3	157326849	12543	180
4	215384976	14676	2133
5	245893761	15681	1005
6	254817369	15963	282
7	326597184	18072	2109
8	361874529	19023	951
9	375468129	19377	354
10	382945761	19569	192
11	385297641	19629	60
12	412739856	20316	687
13	523814769	22887	2571
14	529874361	23019	132
15	537219684	23178	159
16	549386721	23439	261
17	587432169	24237	798
18	589324176	24276	39
19	597362481	24441	165
20	615387249	24807	366
21	627953481	25059	252
22	653927184	25572	513
23	672935481	25941	369
24	697435281	26409	468
25	714653289	26733	324
26	735982641	27129	396
27	743816529	27273	144
28	842973156	29034	1761
29	847159236	29106	72
30	923187456	30384	1278

Tabella 1: i quadrati perfetti composti dalle 9 cifre significative tutte diverse tra loro

I numeri più vicini tra loro sono il 17° e il 18°, la loro differenza è di sole 1892007 unità. I più distanti sono il 12° ed il 13°. I quadrati non terminano mai per 5. La distribuzione dell'ultima cifra tra le 9 possibili è la seguente: 10 numeri terminano con "1"; 3 numeri terminano con "4"; 7 numeri terminano con "6"; 10 numeri terminano con "9". La distribuzione delle ultime due cifre tra le 17 possibili è la seguente: 4 numeri terminano ciascuno per "69" o "81"; 3 numeri terminano ciascuno con "29" o con "56" o con "61" o con "76" o con "84"; 2 numeri terminano ciascuno con "41" o con "49" gli altri terminano una volta con "21" o con "36" o con "89".

È possibile trovare altre curiosità.

Ad esempio non vi sono quadrati formati da cifre tutte dispari, mentre i seguenti 4 sono formati solo da cifre pari:

	Numero	Radice
1	222248464	14908
2	284866884	16878
3	662444644	25738
4	866242624	29432

I quadrati con le cifre alternatamente dispari e pari sono i seguenti 41, che riporto assieme alla loro radice:

	Numero	Radice
1	121418361	11019
2	123454321	**11111**
3	123498769	11113
4	123632161	11119
5	129254161	11369
6	129436129	11377
7	143256961	11969
8	161874729	12723
9	165456769	12863
10	169494361	13019
11	181252369	13463
12	329894569	18163
13	343694521	18539
14	345476569	18587
15	347412321	18639
16	349278721	18689
17	361418121	19011
18	361494169	19013
19	361874529	19023
20	381694369	19537
21	383258929	19577

	Numero	Radice
22	521254561	22831
23	523814769	22887
24	529874361	23019
25	541632529	23273
26	541818729	23277
27	549292969	23437
28	581436769	24113
29	587432169	24237
30	589858369	24287
31	725278761	26931
32	741854169	27237
33	743816529	27273
34	763472161	27631
35	769452121	27739
36	783272169	27987
37	927872521	30461
38	941814721	30689
39	943656961	30719
40	967894321	31111
41	987656329	31427

I quadrati con le cifre alternatamente pari e dispari sono invece i seguenti 8, che riporto assieme alla loro radice:

	Numero	Radice
1	218921616	14796
2	232989696	15264
3	416323216	20404
4	436141456	20884

	Numero	Radice
5	492129856	22184
6	674129296	25964
7	854743696	29236
8	856381696	29264

Ancora: 14 quadrati le cui prime 4 cifre sono dispari e le ultime 5 pari

	Numero	Radice
1	131744484	11478
2	177742224	13332
3	191324224	13832
4	195384484	13978
5	311946244	17662
6	317124864	17808
7	335182864	18308

	Numero	Radice
8	373726224	19332
9	393546244	19838
10	513566244	22662
11	711182224	26668
12	777182884	27878
13	797384644	28238
14	915788644	30262

Non vi sono invece numeri che hanno le prime 4 cifre sono pari e le ultime 5 dispari.
Ve ne sono 53 che hanno coppie di cifre alternatamente dispari e pari:

	Numero	Radice
1	112211649	10593
2	114297481	10691
3	114639849	10707
4	114811225	10715
5	118439689	10883
6	118613881	10891
7	118657449	10893
8	136679481	11691
9	138415225	11765
10	152695449	12357
11	152893225	12365
12	156675289	12517
13	156875625	12525
14	158231241	12579

	Numero	Radice
28	376631649	19407
29	394697689	19867
30	532455625	23075
31	536617225	23165
32	536895241	23171
33	538657681	23209
34	558613225	23635
35	578835481	24059
36	714439441	26729
37	714653289	26733
38	718615249	26807
39	734897881	27109
40	736633881	27141
41	752679225	27435

15	172475689	13133		42	754655841	27471
16	174477681	13209		43	754875625	27475
17	176491225	13285		44	774453241	27829
18	192293689	13867		45	774675889	27833
19	194853681	13959		46	916817841	30279
20	314459289	17733		47	918635481	30309
21	334633849	18293		48	934219225	30565
22	338817649	18407		49	952277881	30859
23	338891281	18409		50	954253881	30891
24	358837249	18943		51	958459681	30959
25	372219849	19293		52	958831225	30965
26	372837481	19309		53	996475489	31567
27	374693449	19357				

E 12 che hanno coppie di cifre alternatamente pari e dispari:

	Numero	Radice			Numero	Radice
1	223382916	14946		7	441588196	21014
2	241926916	15554		8	467164996	21614
3	261986596	16186		9	483384196	21986
4	263542756	16234		10	661724176	25724
5	267126336	16344		11	685182976	26176
6	287166916	16946		12	821166336	28656

Per le terne, invece, ci sono solo soluzioni pari-dispari-pari, in numero di 20 (e non di tipo dispari-pari-dispari):

	Numero	Radice			Numero	Radice
1	228977424	15132		11	648313444	25462
2	242175844	15562		12	662135824	25732
3	244359424	15632		13	666775684	25822
4	264973284	16278		14	688117824	26232
5	282979684	16822		15	824953284	28722
6	422795844	20562		16	828173284	28778
7	442597444	21038		17	828979264	28792
8	464919844	21562		18	844599844	29062
9	486731844	22062		19	866595844	29438
10	644753664	25392		20	886133824	29768

Abbiamo 10 soluzioni $(P)_4$-$(D)_1$-$(P)_4$:

228674884	268238884	444872464	842276484
246238864	286692624	466214464	
264452644	288252484	688432644	

Nessuna $(D)_4$-$(P)_1$-$(D)_4$:

Le 15 seguenti sono del tipo $(P)_2$-$(D)_5$-$(P)_2$

241553764	421973764	467337924	883159524
261533584	427331584	487173184	883753984
269353744	427993344	867773764	889113124
287573764	465351184	881377344	

Mancano le simmetriche $(D)_2$-$(P)_5$-$(D)_2$

Infine abbiamo 38 soluzioni $(P)_1$-$(D)_7$-$(P)_1$:

217739536	291931396	455993316	819333376
235131556	293573956	477597316	831399556
237591396	297355536	491331556	837755136
239197156	413959716	631717956	855913536
253573776	417139776	657717316	873557136
257795136	417957136	671535396	875331396
273373156	437395396	673713936	879359716
277355716	439153936	679957776	891977956
277755556	439573156	699919936	
279357796	455139556	817159396	

Mentre nessuna del tipo $(D)_1$-$(P)_7$-$(D)_1$:

A 5 gruppi abbiamo:

13 soluzioni $(P)_2$-$(D)_2$-$(P)_1$-$(D)_2$-$(P)_2$:

223741764	247369984	445969924	845181184
227165184	263347984	645769744	
243921924	283181584	661929984	
245925124	427745124	687383524	

16 soluzioni $(D)_2$-$(P)_2$-$(P)_1$-$(D)_2$-$(P)_2$:

134281744	314281984	534441924	718883344
136469124	358269184	554225764	738861124
194825764	376825744	594481924	794225124
312865344	396487744	712249344	934647184

Possiamo utilizzare tutte le 10 cifre, con la condizione che la prima sia naturalmente diversa da zero.

Percorriamo qualcuna delle strade già viste.
La più completa, porta ai seguenti **87** numeri che sono un quadrato perfetto:

	Numero	Radice
1	1026753849	32043
2	1042385796	32286
3	1098524736	33144
4	1237069584	35172
5	1248703569	35337
6	1278563049	35757
7	1285437609	**35853**
8	1382054976	37176
9	1436789025	37905
10	1503267984	38772
11	1532487609	39147
12	1547320896	39336
13	1643897025	40545
14	1827049536	42744
15	1927385604	43902
16	1937408256	44016
17	2076351489	45567
18	2081549376	45624
19	2170348569	46587
20	2386517904	48852
21	2431870596	49314
22	2435718609	49353
23	2571098436	50706
24	2913408576	53976
25	3015986724	54918
26	3074258916	55446
27	3082914576	55524
28	3089247561	55581
29	3094251876	55626
30	3195867024	56532
31	3285697041	57321
32	3412078569	58413
33	3416987025	58455
34	3428570916	58554
35	3528716409	59403
36	3719048256	60984
37	3791480625	61575
38	3827401956	61866
39	3928657041	62679
40	3964087521	62961
41	3975428601	63051
42	3985270641	63129
43	4307821956	65634
44	4308215769	65637

	Numero	Radice
45	4369871025	66105
46	4392508176	66276
47	4580176329	67677
48	4728350169	68763
49	4730825961	68781
50	4832057169	69513
51	5102673489	71433
52	5273809641	72621
53	5739426081	75759
54	5783146209	76047
55	5803697124	76182
56	5982403716	77346
57	6095237184	78072
58	6154873209	78453
59	6457890321	80361
60	6471398025	80445
61	6597013284	81222
62	6714983025	81945
63	7042398561	83919
64	7165283904	**84648**
65	7285134609	85353
66	7351862049	85743
67	7362154809	85803
68	7408561329	86073
69	7680594321	87639
70	7854036129	88623
71	7935068241	89079
72	7946831025	89145
73	7984316025	89355
74	8014367529	89523
75	8125940736	90144
76	8127563409	90153
77	8135679204	90198
78	8326197504	91248
79	8391476025	91605
80	8503421796	92214
81	8967143025	94695
82	9054283716	95154
83	9351276804	96702
84	9560732841	**97779**
85	9614783025	98055
86	9761835204	98802
87	9814072356	99066

Con le cifre alternativamente dispari e pari ci sono 50 quadrati perfetti, che terminano tutti con la cifra “6” di essi uno è addirittura una quarta potenza $7676563456=87616^2=296^4$.

	Numero	Radice
1	1010985616	31796
2	1016589456	31884
3	1210761616	34796
4	1230185476	35074
5	1276347076	35726
6	1414963456	37616
7	1438381476	37926
8	1458781636	38194
9	1472563876	38374
10	1616361616	40204
11	1690525456	41116
12	1696121856	41184
13	1696945636	41194
14	1812545476	42574
15	1816123456	42616
16	1858127236	43106
17	1858989456	43116
18	1874543616	43296
19	3054109696	55264
20	3236927236	56894
21	3258583056	57084
22	3292923456	57384
23	3454383076	58774
24	3456969616	58796
25	3458145636	58806

	Numero	Radice
26	3494701456	59116
27	3698585856	60816
28	3818745616	61796
29	3832105216	61904
30	5014905856	70816
31	5058907876	71126
32	5074567696	71236
33	5210529856	72184
34	5290525696	72736
35	5636105476	75074
36	5832987876	76374
37	7036525456	83884
38	7210727056	84916
39	7412521216	86096
40	7434923076	86226
41	7496789056	86584
42	7676563456	87616
43	7854567876	88626
44	7872303076	88726
45	7898587876	88874
46	9010945476	94926
47	9018161296	94964
48	9098107456	95384
49	9236363236	96106
50	9618509476	98074

Con le cifre alternativamente pari e dispari ci sono invece 71 quadrati perfetti, che terminano con la cifra “1” o con “9”.

	Numero	Radice
1	2101030569	45837
2	2103414769	45863
3	2105616769	45887
4	2109656761	45931
5	2123458561	46081
6	2165692369	46537
7	2165878521	46539
8	2169416929	46577
9	2183038729	46723
10	2183412529	46727
11	2189210521	46789
12	2305056121	48011

	Numero	Radice
37	4341096769	65887
38	4383896521	66211
39	4525656529	67273
40	4585050369	67713
41	4721476369	68713
42	4725050121	68739
43	4743490129	68873
44	4745418769	68887
45	4745694321	68889
46	4765278961	69031
47	4943636721	70311
48	4961652721	70439

13	2329896361	48269
14	2343818569	48413
15	2367892921	48661
16	2369450329	48677
17	2383294761	48819
18	2385052569	48837
19	2541470569	50413
20	2543890969	50437
21	2563498161	50631
22	2589690321	50889
23	2741674321	52361
24	2749638969	52437
25	2789212969	52813
26	2907258561	53919
27	2923456761	54069
28	2941652169	54237
29	2947078369	54287
30	2983672129	54623
31	4123052521	64211
32	4129476121	64261
33	4149034569	64413
34	4169672329	64573
35	4301654569	65587
36	4321616121	65739

49	4965034369	70463
50	6109454569	78163
51	6341096161	79631
52	6345874921	79661
53	6543030321	80889
54	6583212769	81137
55	6587432569	81163
56	6907438321	83111
57	6949056321	83361
58	8121434161	90119
59	8149214529	90273
60	8301214321	91111
61	8361090721	91439
62	8383416721	91561
63	8385614329	91573
64	8549036521	92461
65	8563096369	92537
66	8725614921	93411
67	8727856929	93423
68	8783250961	93719
69	8907018129	94377
70	8923258369	94463
71	8947078921	94589

Non vi sono quadrati le cui prime cinque cifre siano tutte pari e le restanti tutte dispari mentre ve ne sono ancora 71 che hanno le prime cinque dispari e le restanti cinque pari, di essi uno è una quarta potenza: $3317760000=57600^2=240^4$.

	Numero	Radice
1	1115560000	33400
2	1151380624	33932
3	1157360400	34020
4	1191768484	34522
5	1197160000	34600
6	1317544804	36298
7	1319142400	36320
8	1339560000	36600
9	1339706404	36602
10	1359986884	36878
11	1391140804	37298
12	1515700624	38932
13	1579108644	39738
14	1593766084	39922
15	1599360064	39992
16	1713960000	41400
17	1715782084	41422

	Numero	Radice
37	3931540804	62702
38	3971520400	63020
39	5111106064	71492
40	5111964004	71498
41	5139742864	71692
42	5195526400	72080
43	5317326400	72920
44	5331920400	73020
45	5377582224	73332
46	5535360000	74400
47	5553528484	74522
48	5577102400	74680
49	5715360000	75600
50	5779344484	76022
51	5913302404	76898
52	7119984400	84380
53	7151746624	84568

18	1735722244	41662
19	1753766884	41878
20	1797760000	42400
21	1919140864	43808
22	1937760400	44020
23	1959124644	44262
24	1971182404	44398
25	1971360000	44400
26	1991122884	44622
27	3133760400	55980
28	3135104064	55992
29	3157540864	56192
30	3171942400	56320
31	3191346064	56492
32	3317760000	57600
33	3511984644	59262
34	3597360484	59978
35	3599760004	59998
36	3779544484	61478

54	7157160000	84600
55	7331126884	85622
56	7355120644	85762
57	7399784484	86022
58	7511342224	86668
59	7515502864	86692
60	7933108624	89068
61	7937384464	89092
62	7939166404	89102
63	9139360000	95600
64	9139742404	95602
65	9331560000	96600
66	9331946404	96602
67	9371788864	96808
68	9391160464	96908
69	9571100224	97832
70	9737742400	98680
71	9913786624	99568

I numeri $5500002244=74162^2$ e $7744000000=88000^2$ hanno le cifre uguali a coppie

Non ci sono numeri del tipo DDD-PPPP-DDD, mentre ve ne sono 64 del tipo PPP-DDDD-PPP (chiaramente D sta per dispari e P per pari):

	Numero	Radice
1	2045933824	45232
2	2049191824	45268
3	2067339024	45468
4	2203175844	46938
5	2205993024	46968
6	2221991044	47138
7	2229917284	47222
8	2243159044	47362
9	2261953600	47560
10	2269379044	47638
11	2427335824	49268
12	2463335424	49632
13	2463931044	49638
14	2625537600	51240
15	2641137664	51392
16	2685519684	51822
17	2845155600	53340
18	4027171600	63460
19	4045977664	63608
20	4049795044	63638
21	4065337600	63760

	Numero	Radice
33	4821913600	69440
34	4861157284	69722
35	4867573824	69768
36	4881537424	69868
37	6203137600	78760
38	6205973284	78778
39	6209755204	78802
40	6263139600	79140
41	6269155684	79178
42	6421137424	80132
43	6489913600	80560
44	6689931264	81792
45	6865779600	82860
46	8021351844	89562
47	8029593664	89608
48	8045731204	**89698**
49	8067991684	89822
50	8201113600	90560
51	8207997604	90598
52	8261355664	90892
53	8263173604	90902

22	4269315600	65340
23	4403915044	66362
24	4427571600	66540
25	4443555600	66660
26	4445955684	66678
27	4449957264	66708
28	4461171264	66792
29	4465179684	66822
30	4663797264	68292
31	4683759844	68438
32	4805539684	69322

54	8269719844	90938
55	8287917444	91038
56	8401555600	91660
57	8425771264	91792
58	8445977604	91902
59	8489779600	92140
60	8607757284	92778
61	8623351044	92862
62	8641933444	92962
63	8687731264	93208
64	8881177600	94240

I numeri PPPP-DD-PPPP sono 71, non ve ne sono di tipo DDDD-PP-DDDD:

	Numero	Radice
1	2042316864	45192
2	2060978404	45398
3	2062976400	45420
4	2206932484	46978
5	2240318224	47332
6	2246570404	47398
7	2262714624	47568
8	2264998464	47592
9	2286752400	47820
10	2428518400	49280
11	2442336400	49420
12	2442534084	49422
13	2460358404	49602
14	2466314244	49662
15	2466910224	49668
16	2600796004	50998
17	2686556224	51832
18	2800738084	52922
19	2808152064	52992
20	2826198244	53162
21	2828112400	53180
22	2860110400	53480
23	2864390400	53520
24	4004358400	63280
25	4020574464	63408
26	4022350084	63422
27	4062532644	63738
28	4080398884	63878
29	4082954404	63898
30	4400730244	66338
31	4422516004	66502

	Numero	Radice
37	4626992484	68022
38	4640334400	68120
39	4648512400	68180
40	4662158400	68280
41	4682938624	68432
42	4866736644	69762
43	4882934884	69878
44	6020518464	77592
45	6040398400	77720
46	6082752064	77992
47	6084312004	78002
48	6288172804	79298
49	6480572004	80502
50	6622378884	81378
51	6642576004	81502
52	6662150884	81622
53	6802950400	82480
54	6804930064	82492
55	6826394884	82622
56	6842598400	82720
57	6862134244	82838
58	8006312484	89478
59	8024576400	89580
60	8028518404	89602
61	8040350224	89668
62	8204374084	90578
63	8204736400	90580
64	8206910464	90592
65	8480936464	92092
66	8482778404	92102
67	8600336644	92738

32	4424910400	66520
33	4464912400	66820
34	4466516224	66832
35	4488732004	66998
36	4622912064	67992

68	8682512400	93180
69	8802192400	93820
70	8840136484	94022
71	8888718400	94280

Sicuramente è ardua, dal punto di vista del calcolo, la strada che porta alle seguente domanda: continuando a guardare numeri nei quali compaiono tutte e 10 le cifre, quanti (e quali) sono i quadrati a 20 cifre in cui ciascuna delle 10 compare due e due sole volte?

Bene, il loro numero è di ben ***468312***.
Il più piccolo è $10024959353287867641=3166221621^2$.
Il più grande è $99887301530267526144=9994363488^2$.

Non ve ne sono di palindromi, mentre, data la vastità della popolazione, ve ne sono alcuni del tipo $(PD)_{10}$, $(DP)_{10}$, $(PPDD)_5$, $(DDPP)_5$ e così via, ove D sta per cifra dispari, P per pari ed il gruppo è ripetuto un numero di volte pari al pedice.

Riporto la casistica dei 4 numeri aventi le prime dieci cifre dispari e le altre pari:

$15179937538860420624=3896143932^2$
$17995713532486082064=4242135492^2$
$31973575192026406884=5654518122^2$
$39513751972868264004=6285996498^2$

Non ve ne sono invece aventi le prime dieci pari e le restanti dispari. Il numero seguente ha la radice che è a sua volta palindroma:

$19382464500128577936=4402552044^2$

vi sono 219 coppie le cui radici differiscono di sole 3 unità; la più piccola è la seguente:

$10295103846495283776=3208598424^2$
$10295103865746874329=3208598427^2$

la più grande:

$98694751251076332804=9934523202^2$
$98694751310683472025=9934523205^2$

La massima differenza tra le radici è di 15068091 unità:

$11099750234438682756=3331628766^2$
$11200379852653678449=3346696857^2$

Non vi racconto cosa succede a 30 cifre; riporto solo che:

il numero più piccolo è: $102345678905953162236047187984=319915112031228^2$;

il numero più grande è: $9998887773302145652644063015 21=99994438711871 1^2$;

e che stimo il loro numero essere di circa 25,6 miliardi.

Ed ora la decina delle decine, provatevi a trovare quadrati di 100 (dico 100) cifre costituiti dalle dieci cifre ripetute 10 e solo 10 volte: eccone nove, la cui prima cifra rappresenta tutte le 9 significative. Il loro numero è tale da meritare qualche ricerca su palindromi, simmetrici e quant'altro (ricerca che ovviamente lascio anche al curioso lettore):

(1) $32624832353235323532353235323532353235323534666115^2$ =
1064379686076710298192535552517968068434006131974777833858124185255809309303767660494422814452919 3225

(2) $51622754325432543254325432543254325432543257085150^2$ =
2664908764143964353931142689226418391414099190568571525771827607803284578882930797330165674350522500

(3) $55622741734173417341734173417341734173417343434435^2$ =
3093889398026557222778983568923949100580625308364014111764670796512594553784811424436776001143769225

(4) $65622712341234123412341234123412341234123416249235^2$ =
4306340375020361326961779086199449027811072449183770651628979989708141731264835654482555235638085225

(5) $73622773737373737373737373737373737373737376077267^2$ =
5420312812784528109376594225079073563922049115072483506344617896133047648199163350678507668754189289

(6) $81622724682468246824682468246824682468246828112947^2$ =
6662269184590011164432774910654381769810144890774755233251533520188702538620698753543732976989024809

(7) $87622787878787878787878787878787878787878788699441^2$ =
7677752955651056014692378328741965105601469381648702920580348943985307621671258034894399204233712481

(8) $91622787878787878787878787878787878787878788594452^2$ =
8394735258681359044995408631772268135904499672005461167368227731864095500459136822773186921725180304

(9) $97622711111111111111111111111111111111111113406292^2$ =
9530193724683456790123456790123456790123457238247018517609876543209876543209876543209881811065189264

La mia stima per il numero di quadrati con tale proprietà è di circa $3.7 \cdot 10^{43}$ (all'incirca uno ogni milione).

Interpolando i suddetti dati posso stimare che il numero di quadrati aventi le dieci cifre ripetute k volte è approssimabile con la formula $10^{5(k-1)}$.

- **Sui cubi**

Anche i cubi perfetti hanno i loro diritti (bisogna tutelare le minoranze!). È ben noto che non ci sono né cubi perfetti di 9 cifre né di 10 che le abbiamo tutte diverse tra loro.

Qualche curiosità per i numeri a 10 cifre.
Hanno tutte le cifre pari i seguenti :

$1822^3 = 6048464248$
$1824^3 = 6068404224$
$1902^3 = 6880682808$
$2000^3 = 8000000000$
$2002^3 = 8024024008$
$2020^3 = 8242408000$

I 1155 candidati hanno 5689 cifre dispari e 5861 pari.
Non ve ne sono che hanno tutte le cifre dispari, o alternatamente pari-dispari né dispari-pari.
A coppie dispari-pari ve ne sono due:

$1155^3 = 1540798875$
$1791^3 = 5744956671$

e uno solo a coppie pari-dispari: $1263^3=2019487744$.
Tre hanno le prime cinque cifre dispari e le seconde cinque pari:

$1042^3 = 1131366088$
$2092^3 = 9155562688$
$2154^3 = 9993948264$

L'altro caso simmetrico (5 pari e poi 5 dispari) non capita mai.

Se definiamo u il livello di uniformità di un numero come quel valore che rappresenta il massimo numero di occorrenze di una qualsiasi cifra all'interno del numero dato, abbiamo la seguente tabella:

u	$n(u)$
1	0
2	401
3	564
4	148
5	25

u	$n(u)$
6	14
7	1
8	0
9	2
10	0

che riepiloga il fatto che non ci sono numeri con le dieci cifre tutte diverse (u=1 non appare) così come non ve ne sono con cifre tutte uguali (massimo dell'uniformità, u=10 non appare). Vi sono 2 numeri (banali) molto uniformi (u=9): $1000^3=1000000000$ e $2000^3=8000000000$.

Qualche curiosità per i numeri aventi le 9 cifre tutte diverse tra loro.
Nessun numero ha tutte le cifre pari né tutte dispari. $463684824=774^3$ ha otto cifre pari, mentre ne hanno 8 dispari i seguenti:

139798359	337153536	537367797	776151559
329939371	533411731	716917375	938313739

Alternatamente dispari e pari le ha solo 725^3=381078125, mentre alternatamente pari e dispari non le ha nessuno.

A terne pari-dispari-pari o dispari-pari-dispari rispettivamente 930^3=804357000; 997^3=991026973 e 999^3=997002999.

I seguenti tre numeri hanno la prima parte dispari, la seconda pari:

580^3= 195112000
804^3= 519718464
820^3= 551368000

I seguenti due numeri hanno la prima parte pari, la seconda dispari:

611^3= 228099131
951^3= 860085351

I valori di uniformità sono i seguenti:

u	$n(u)$
1	0
2	256
3	211
4	53
5	10

u	$n(u)$
6	5
7	0
8	0
9	0
10	0

Così come per i quadrati, vi sono anche dei cubi di venti cifre formati dalle 10 coppie presenti una e una sola volta. Il loro numero totale è piccolo, 138 in effetti, quindi posso permettermi di elencarveli tutti, facendo notare che, tra lo loro radici cubiche, ve ne sono tre particolari: 2389119 (il primo gruppo di tre cifre è il doppio dell'ultimo), 2583258 (il primo gruppo di tre cifre è ripetuto alla fine), 3730374 (l'ultimo gruppo di tre cifre è maggiore di una unità del primo):

n	$\sqrt[3]{n}$
10056421854778936239	2158479
10514426699873530728	2190762
10728468416903357952	2205528
10931026695583774248	2219322
12192648050964783375	2301615
12655803921649480773	2330397
12751696903745840832	2336268
12908597380425646731	2345811
13124683009764879552	2358828
13127988344502069576	2359026
13271803609654847529	2367609
13626812590497857304	2388534
13636827484090572159	2389119
13645716598938042072	2389638
13774500159462283968	2397132
14330951788706249256	2428986
15713968328947040256	2504736
16097955831370682424	2524974
16312699502754743808	2536152
17238653844907609512	2583258

n	$\sqrt[3]{n}$
28186527540794936013	3043317
28339177059825466401	3048801
28551103603742974968	3056382
28715276014563034989	3062229
29655474392601137088	3095292
29942671831455763008	3105252
30167916274204385859	3113019
30735742426016189589	3132429
30871584691242709653	3137037
31454007925769361288	3156642
31596274203786150984	3161394
32136594845860017297	3179313
33672108058517962944	3229164
33698110506742249875	3229995
34348821095266195077	3250653
35819614053709642827	3296403
36484001623825579179	3316659
36772259408645039811	3325371
36990045813521827467	3331923
37096357568104124928	3335112

n	$\sqrt[3]{n}$
61282049571934603875	3942555
61422890350936847517	3945573
61452598017436807329	3946209
61480632897407553129	3946809
63528076731412905984	3990144
65062740711943832859	4022019
67408459203897311625	4069785
67802317045981249536	4077696
68478569541332070912	4091208
70379211968205658344	4128714
70386729645029541381	4128861
70543187989046152632	4131918
73658276392091180544	4191864
75092375213614860984	4218894
75429280165793601384	4225194
75617098842531604392	4228698
75861503086249137249	4233249
76049553620219318784	4236744
76880993746532401152	4252128
77246238093451869051	4258851

17376494658908203125	2590125	38327121490650469875	3371595	77962124913540588063	4271967
17722869363495105048	2607222	38357105806976912424	3372474	78682090644192751533	4285077
18001763952647549283	2620827	38640216892593704751	3380751	80379442203596856711	4315671
18026193344956705728	2622012	39584706623910421875	3408075	80952736805241917643	4325907
18564703149232057896	2647866	40917148806322536957	3445893	82941008932541677653	4361037
18596334572628710409	2649369	41052592370698846371	3449691	83079046681529421375	4363455
18792157489020363456	2658636	41287165579033806249	3456249	83621025751983094467	4372923
19068252343710964857	2671593	41525760390387612984	3462894	84037168635740992125	4380165
19704068322581956347	2700963	41627400359298756813	3465717	84127335966570240891	4381731
20345880395917426176	2729976	42241707393906518568	3482682	84479986025301376125	4387845
20489556378417912603	2736387	42920475818667319053	3501237	84663100427585239197	4391013
20584723697098465113	2740617	45381020996787531264	3566904	87021405663849279531	4431411
20615699487438305271	2741991	45397053617690188224	3567324	87509046382659314217	4439673
22901973045783584661	2839821	45436807891369027125	3568365	88904345619021773625	4463145
23475809729036611584	2863344	46101372994863085752	3585678	88990426331757401625	4464585
23749069507614288531	2874411	46733608592210149875	3601995	91124088753037496625	4499985
23990737148860465152	2884128	47898351913276650024	3631674	91147236308455027896	4500366
24197051337695062848	2892372	51079347268695134208	3710352	91394265783804610752	4504428
24276118970465083359	2895519	51910728839064753624	3730374	92009755843761826413	4514517
24601419583063729875	2908395	52543748906389210176	3745476	93635790517482042816	4540956
24864233190609175875	2918715	53626050918479417832	3771018	95182523448103096767	4565823
25653869230870449171	2949291	54734011669720859328	3796812	95352608973810764421	4568541
26358206408971547319	2976039	57205164286049313897	3853113	95948372042871310656	4578036
26559188941637320704	2983584	59237861253009447861	3898221	97623020817549856413	4604517
27310685109563429847	3011463	59346245280198076173	3900597	98981767323060254541	4625781
27420365898041375169	3015489	60053689491271342875	3916035	99368200745116834257	4631793

Le radici più ravvicinate (4128714 e 4128861) distano 146 unità, le più lontane (2741991 e 2839821) ben 97830 unità. Le ultime cifre di *n* sono abbastanza uniformemente distribuite (prevalgono il 4 e il 5 con frequenza 18, naturalmente manca lo 0: perché?); la cifra centrale più frequente nella radice cubica è 1 (appare 20 volte). Nel numero *n*, la coppia più frequente è “42” con 40 occorrenze; le meno frequenti, con 12 occorrenze, sono “22” e “77”, le 10 coppie con la stessa cifra, da “00” a “99” occorrono ordinatamente 17, 17, 12, 17, 15, 15, 15, 12, 19, 13 volte.

Un rapido sguardo alle trenta cifre (*k*=3) anche per i cubi. Ne riportiamo il minore ed il maggiore, grazie ai quali possiamo stimarne in circa 14900 il numero totale:

$4642110594^3 = 100033726751278963952981464584$
$9999257781^3 = 999777350826262438514680310541$

Anche i cubi hanno diritto di essere rappresentati nel mondo di *k*=10, ad esempio:

(1) $1123456789003703703707393692097478^3 =$
1417976779636384664061028543439525809035119770609238818667721351024049575225179241403946832888059352

(2) $1777777777777777777777777781866638^3 =$
5618655692729766803840877953720441503429355281207133148151726393408877914951989094423846125636006072

mentre, notevolmente, i due numeri seguenti, i cui cubi hanno le dieci cifre ripetute ciascuna 10 volte

(3) 1532456789003703714707393784946719
(4) 1532456789003703714707393785186773

differiscono pochissimo tra loro, solo 240054 unità ossia non più di una parte su 10^{29}.

Azzardo che la legge che approssimi il numero di cubi aventi le dieci cifre ripetute k volte è del tipo $10^{3(k-1)}$.

- **Quarte potenze**

Diamo una occhiata alle quarte potenze a 2 e poi a 3 decine di cifre.

k=2

$69636^4=4849172496^2=23514473895962870016$
$70215^4=4930146225^2=24306341799881750625$
$77058^4=5937935364^2=35259076387041812496$
$80892^4=6543515664^2=42817597245013360896$

k=3

$17824719^4=317720607428961^2=100946384385027947782661539521$ (il primo)
$17940018^4=321844245840324^2=103583718580526912376904424976$
$18027474^4=324989818820676^2=105618382337095812427445096976$
…
$31427607^4=987694481746449^2=975540389272386476853124109601$
$31565493^4=996380348333049^2=992773798544288061153025636401$
$31607052^4=999005736130704^2=998012460822049787453371535616$ (l'ultimo)

La stima teorica ci dice che l loro numero si aggira sulle 145 unità. Ve ne sono in realtà 163.

- **Quinte potenze**

Sono particolarmente affezionato al numero 5, per cui dico poche cose sul fatto che non ci sono quinte potenze con le 9 né con le 10 cifre tutte diverse tra loro. Non ve ne sono neppure a 20 cifre composte dalle 10 coppie di cifre uguali, né con cifre tutte dispari o tutte pari o alternate o a coppie, quadruple, quintuple o decuple alternate.

A 30 cifre le cose cambiano, data la vastità della popolazione: e quindi abbiamo le 7 seguenti soluzioni:

$643905^5=110690152879433875483274690625$
$680061^5=145458581697864327220703996301$
$720558^5=194242706843325709850513196768$
$775113^5=279785436151445000683198226793$
$840501^5=419460598737334268928156702501$
$878613^5=523586118778694132765090044293$
$984927^5=926872965448613570921013853407$

Per inciso, i seguenti numeri hanno 5 cifre pari e 5 dispari:

$1252332576 = 66^5$
$1564031349 = 69^5$
$2373046875 = 75^5$

$2706784157 = 77^5$
$3707398432 = 82^5$
$6590815232 = 92^5$
$6956883693 = 93^5$
$8587340257 = 97^5$
$9509900499 = 99^5$

- **Seste potenze**

Sono interessanti perché intersecano quadrati e cubi.

Dei 31868 candidati a dare 30 cifre nessuno fornisce il risultato cercato. Occorre quindi esplorare le 40 cifre di k=4. Troviamo i valori minimo e massimo:

$3470187^6=12042197814969^3=41788678308933829203^2=1746293634807556719182438094028375615209$
$4497738^6=20229647116644^3=90987652563120151272^2=8278752918947065033352491456600163217984$

ciò che fornisce una stima di una decina di unità (provatevi a calcolarne il numero esatto).

- **Potenze superiori**

Per la settima potenza non vi sono soluzioni né a 9, né a 10, né a 20 né a 30 cifre.

Occorre arrivare a 40 cifre per soddisfare il requisito di avere le k=4 diecine di cifre rappresentate una e una sola volta, ciò capita in due soli casi:

$421359^7=2358120113272908958044378755043646667919$
$493107^7=7089052192698075216163035973447281546843$

Se effettuiamo la stessa indagine per l'undicesima potenza non troviamo soluzioni neppure per k=5, né per k=6.

Qualche curiosità a 100 cifre:

Potenze 17-esime. Non vi sono numeri con u=1/10; i seguenti hanno u=11/100:

$678742^{17}=1377147013961463952191014543193032666568257982845750424886819469083967279502903304525800117068234752$
$684246^{17}=1579823404939701193524674877243573627455089010910961388040254638669809245815742726582535681973026816$
$708019^{17}=2823342135515157425982502097917882868379739364444150648778820403425916081266677560999524310306701939$
$732582^{17}=5041457851954159894668586787227857221243113144979170332908603497650203831197084103986524620656607232$

ad essi mancano rispettivamente un “7” e un “8”; un “1” e un “3”; un “1” e un “6”, un “3” e un “9” per raggiungere la meta k=10.

Potenze 19-esime. Non vi sono numeri con u=1/10; i seguenti tre hanno u=11/100:

$169016^{19}=2141058663354279573273825048760139905165241012619968472986401288993068975344397002563058751437275136$
$176616^{19}=4938224708224071937053988899464118800067972686821718405960115165723554179765246143923921634025537536$
$177129^{19}=5217996036452631309764483843150562154072394016609659728141742878939884170570233842106381762572088569$

ai tre numeri mancano rispettivamente un “4” e un “8”; uno “0” e un “3”; un “5” e un “9” per raggiungere la meta k=10.

Potenze 20-esime. Non vi sono numeri con u=1/10; il seguente ha u=11/100:

93797^{20}=2778298873498719054113031212408210879556118550358946734886320428760366473065767679152342436995092401

ad esso mancano un soltanto un “5” e un “9” per raggiungere la meta k=10.

Potenze successive.
u=11/100 (mancano una cifra 4 e una cifra 5):

34531^{22}=6927896972319852086504243633700635594017144690002386754297198834115308760630227931841587292457817561

u=12/100 (mancano quattro cifre 9; vi sono un “1”, un “2” e due “3” di troppo):

693^{35}=2664791358970331108406763725288239126325775601223801218881424346068958054753010491403761963547324557

A partire dalla 63ª potenza e fino alla 332ª vi è al massimo una sola base che fornisce potenze di 100 cifre.
5^{143} e 29^{68} hanno un alto livello di disuniformità (95 su 100 sommando al massimo dieci occorrenze per cifra)

- **Dieci di dieci**

Uno sguardo alla decima potenza la cui base abbia dieci cifre di modo che il risultato abbia a sua volta le ricercatissime cento cifre.

La decima potenza di 7943282723, come quella di 7943287236 non presenta neppure un “2”; 7943289064 e 7943297219 sempre alla decima potenza non regalano neanche una cifra “3” tra le cento; 8955636255 non restituisce la cifra “4”; 7943293714 e 7943297410 non danno un “5”; 7943288281 e 7943290428 non regalano la cifra “6”; 7943286200 non fornisce il “7”; 7943293838 non dà alcun “8”; 7943287721 e 7943290571 nessun “9”; 8943283907 e 8943287828 danno origine a numeri senza la cifra “0”. Più rari i casi che generano cento cifre senza “1”, come ha l’ardire di fare 9240061276 laddove 8610067269 e 8610069209 hanno un solo “1” proprio in centesima posizione (cifra dell’unità).

- **Ciascuno secondo la propria quantità**

I numeri che seguono, elevati alla potenza mostrata, risultano in un altro numero formato da 45 cifre in cui compaiono le 9 cifre significative tante volte quanto la cifra stessa (l’uno 1 volta, il due 2 volte, il tre 3 volte e così via).

Inoltre.

Potenze di 10. Tra le 5993 basi, i termini della successione {53, 58, 60, 82, 46, 75, 51, 85, 91, 74} ne rappresentano quante (tra le complessive 631), elevate appunto alla decima potenza, danno ordinatamente numeri di 45 cifre ai quali manchi rispettivamente la cifra 0, 1, 2, …, 9. Il più uniforme (u=5/45) è la decima potenza di 27031 che vede rappresentate tutte le cifre 5 volte eccetto il “5” (quattro occorrenze) e il “9” (una sola occorrenza). A parte le basi che terminano con “0” che sono molto disuniformi, è da notare 27362 la cui potenza ha ben 14 volte la cifra “2”. Molto uniformi sono i numeri generati da 25748, 27155 e 29075 nei quale una qualsiasi cifra compare almeno 4 volte e non più di 7.

Potenze di 9. Tra le 20820 basi, i termini della successione {182, 178, 175, 189, 214, 223, 238, 238, 245, 237} ne rappresentano quante (tra le complessive 2051), elevate alla nona potenza, danno ordinatamente numeri di 45 cifre ai quali manchi rispettivamente la cifra 0, 1, 2, …, 9. Tra i 16 ad alta uniformità (u=5/45) le none potenze di 80522, 84919, 88528, 90728, 94553 vedono rappresentate tutte le cifre solo 4 oppure 5 volte. Da notare che la potenza di 99999 ha ben 17 volte la cifra "9" e 12 la cifra"0".

Potenze di 8. Vi sono 97500 basi, i termini della successione {182, 178, 175, 189, 214, 223, 238, 238, 245, 237} ne rappresentano quante (tra le complessive 2051), elevate alla nona potenza, danno ordinatamente numeri di 45 cifre ai quali manchi rispettivamente la cifra 0, 1, 2, …, 9. Tra i 16 ad alta uniformità (u=5/45) le none potenze di 80522, 84919, 88528, 90728, 94553 vedono rappresentate tutte le cifre solo 4 oppure 5 volte. Da notare che la potenza di 99999 ha ben 17 volte la cifra "9" e 12 la cifra"0".

- **Primi**

Non può mancare uno sguardo ai solitari primi.

Tra i numeri a 9 cifre vi sono molti numeri primi che hanno tutte le cifre diverse tra loro, ad esempio: 123458609; naturalmente non vi sono numeri primi di nove cifre che le utilizzino le cifre da 1 a 9 né a 10 cifre che le abbiano tutte diverse (chiedetevi il perché, e rispondetevi pure) possiamo dire che 1024356787 ci va molto vicino (se l'ultima cifra fosse maggiore di due unità!).

Il massimo numero k di cifre che possa essere primo e utilizzi le figure da 1 a k compresi è 7.

Non vi sono possono essere soluzioni neppure per k=1, 2, 3, 5, 6, 8.

A quattro cifre abbiamo le seguenti 4 soluzioni, su un totale di 13 che hanno le quattro cifre consecutive

1423
2143
2341
4231

(per inciso ci sono anche 2543, 4253, 4523; 4567, 4657, 5647, 6547; 5867, 6857).

A sette cifre abbiamo i numeri (elenco i più piccoli ed i più grandi)

1234657
1245763
1246537
1246573
1247563
1254367
1254637
1256347
1257463
1263547

1264537
1264573
1265347
…
7621543
7624531
7625143
7625341
7641253
7642513
7652413

- **E poi?**

È fuori dello scopo di questa sezione spingersi in là con i calcoli, per cui do spazio ai giovani esploratori di cifre per ulteriori ricerche.