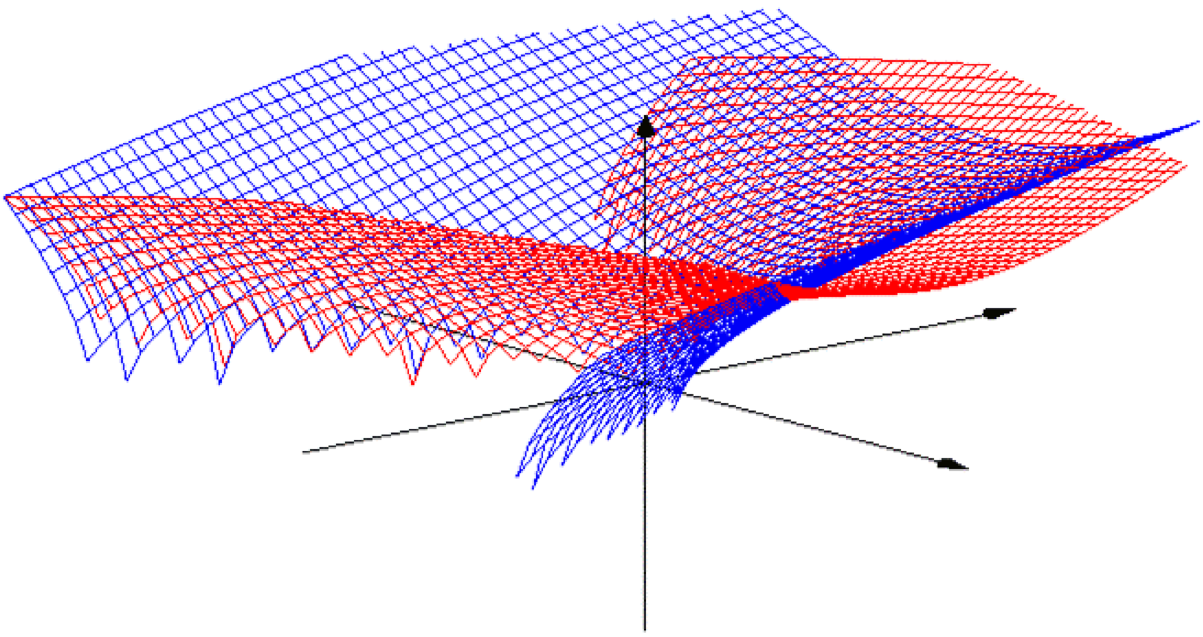
II.1. Quadrati e cubi

Diamo un'occhiata al seguente sistema di due equazioni in due incognite, di quarto grado ad un parametro:

$$\begin{cases} x^2 + ky = z^2 \\ kx + y^2 = w^2 \end{cases} \qquad [1.1]$$

Prima di guardarlo dal punto di vista diofanteo, cercandone cioè le soluzioni intere per tutte e quattro le incognite quando anche k sia un intero, osserviamo alcuni fatti. Innanzitutto il sistema è simmetrico in (x, y) cioè se (x_0, y_0) è una soluzione, lo è pure (y_0, x_0) che effettua lo scambio tra z e w. Le soluzioni sono inoltre rappresentate dall'intersezione di due quadriche con gli assi di simmetria ortogonali tra loro, le mostro in figura per il valore k=5 come bell'esempio.



Cominciamo con i casi facili, scopriremo che ciascun sottoinsieme di soluzioni genera delle sequenze più o meno articolate (qualcuna banale).

In virtù dell'osservazione relativa alla simmetria porremo sempre $y \geq x$.

Escludendo il caso x=y=0, la soluzione più semplice è x=y=1 che genera la sequenza di soluzioni seguenti:

$(x,y)=(1,1)$; $k=n^2-1$; $(z,w)=(n^2; n^2)$ [1.2]

Sorvolerei sul resto per passare al caso più generale in cui $x=y$. La [1.1] diventa

$$x^2+kx=z^2 \quad [1.3]$$

per essa è più agevole trovare i valori di k corrispondenti ad un determinato valore di x. Abbiamo

$$k=\frac{z^2-x^2}{x}$$

Distinguiamo due casi. Quando x è *squarefree* (in italiano non mi viene un buon termine, ossia tra i sui divisori *non* si ha alcun quadrato perfetto (ad esempio 15 è squarefree, mentre 8 non lo è poiché $4=2^2$ è un suo divisore, come pure non lo è 18 poiché $9=3^2$ è un suo divisore) allora si ha semplicemente, ponendo $z=nx$:

$$k=\frac{n^2x^2-x^2}{x}=n^2x-x \quad [1.4]$$

Nel caso più generale poniamo $x=\alpha t^2$ dove α deve essere a sua volta squarefree per ottenere tutte le soluzioni possibili (ad esempio si deve scrivere $x=16=1\cdot16$ e non $4\cdot4$; o ancora $x=36=1\cdot36$ e non $4\cdot9$ né $9\cdot4$ poiché in tali casi otterremmo solo un numero parziale di soluzioni). Tabulando dalla [1.3] alcuni valori di k in funzione di x e quindi di t vediamo che le differenze prime k_{n+1}-k_n valgono

$$k_{n+1}-k_n=\alpha(2n+1)+2\alpha\ t \quad [1.5]$$

che integrata, tenendo conto delle condizioni iniziali, fornisce la soluzione generale dell'equazione [1.3] che scriviamo in forma completa e che, per $t=1$ include la [1.4]

$(x, y)=(\alpha t^2, \alpha t^2)$; $k=\alpha(n+t)^2-\alpha t^2$; $(z, w)=(\alpha t(t+n); \alpha t(t+n))$ [1.6]

Con questa soluzione generale possiamo divertirci molto e calcolare, ad esempio, la sequenza $ku(p)$ che definisce il numero di soluzioni uguali al variare di k, ovvero soluzioni $x=y$ tali che $k=p$:

k_u=[0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 2, …]

Per un dato valore di k il massimo valore per $x=[k/2]^2$. Indichiamo tale valore di k con k_m: possiamo scrivere la sequenza dei k_m:

k_m=[3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, …]

che non sono altro che i numeri dispari per cui in tale caso in effetti è $x_{\max}=[(k_m-1)/2]^2$.

Mescoliamo le carte come al solito e vediamo se gli onnipresenti Fibonacci ci mostrano qualcosa di speciale. Se imponiamo che sia x=F_i; y=F_{i+1} abbiamo sicuramente una soluzione semplice quando k=4(F_i+F_{i+1})= 4 F_{i+2} infatti, svolgendo i passaggi otteniamo l'identità

$$\begin{cases} F_i^2 + 4(F_i + F_{i+1})F_{i+1} = (F_i + 2F_{i+1})^2 = (F_{i+1} + F_{i+2})^2 = F_{i+3}^{\;2} = z^2 \\ \quad 4(F_i + F_{i+1})F_i + F_{i+1}^{\;2} = (2F_i + F_{i+1})^2 = (F_i + F_{i+2})^2 = w^2 \end{cases} \qquad [1.7]$$

Vi sono altre soluzioni, nella stessa ipotesi x=F_i; y=F_{i+1} , i corrispondenti valori di k crescono più che esponenzialmente.

Giusto per il contorto piacere numerico segnalo:

$$\begin{cases} F_4^{\;2} + F_9(F_4 + F_5)F_5 = (F_9 + F_4)^2 & \to 3^2 + 272 \cdot 5 = 37^2 \\ F_9(F_4 + F_5)F_4 + F_5^{\;2} = (F_6 + F_8)^2 & \to 272 \cdot 3 + 5^2 = 29^2 \end{cases}$$

Oppure

$$\begin{cases} F_{10}^{\;2} + (F_{12} + F_3)(F_4 + F_5)F_{11} = (F_5 + F_{14} + F_{16})^2 & \to 55^2 + 21024 \cdot 89 = 1369^2 \\ (F_{12} + F_3)(F_4 + F_5)F_{10} + F_{11}^{\;2} = (F_4 + F_{11} + F_{16})^2 & \to 21024 \cdot 55 + 89^2 = 1079^2 \end{cases}$$

Al lettore lascio di condurre altri viaggi.

La [1.7] è in effetti vera in un caso più generale, ossia quando vale la condizione k=4(p+q) che fornisce la terna di soluzioni a due parametri

(x, y)=(p, q); $\quad k$= 4(p+q); $\quad (z, w)$=((p+2q); (2p+q)) [1.8]

La [1.8] è l'unica soluzione del tipo k=αx+βy, come potete facilmente verificare.

Ovviamente se p=F_p, q=F_q abbiamo

(x, y)=(F_p, F_q); $\quad k$= 4(F_p + F_q); $\quad (z, w)$=((F_p +2 F_q); (2 F_p + F_q))