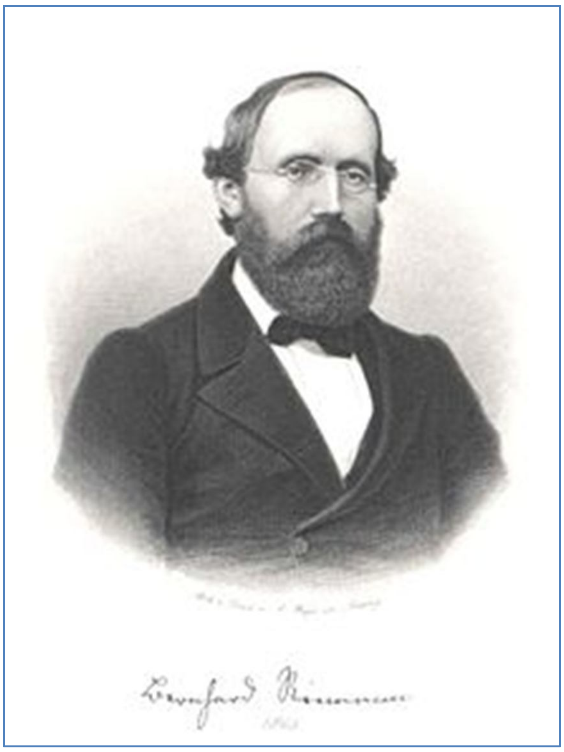
SUL NUMERO DI NUMERI PRIMI MINORI DI UNA QUANTITÀ DATA

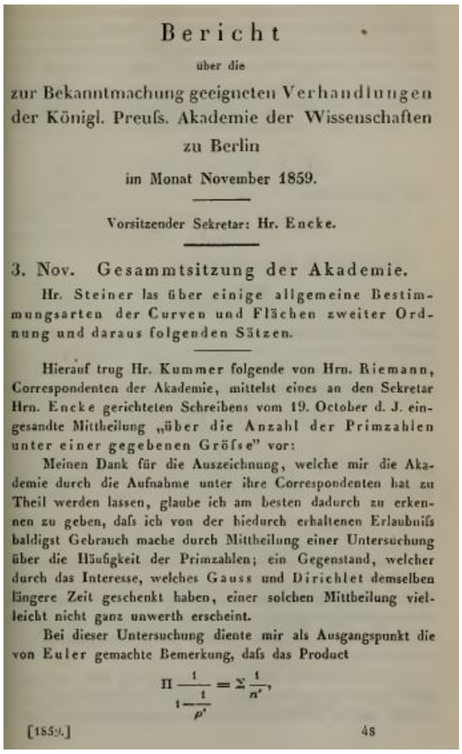
Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse

Bernhard Riemann

Monatsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, November 1859 p. 671

Traduzione e note di Carmine Suriano (2018)





Bericht

über die

zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königl. Preuſs. Akademie der Wissenschaften zu Berlin

im Monat November 1859.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Encke.

3. Nov. Gesammtsitzung der Akademie.

Hr. Steiner las über einige allgemeine Bestimmungsarten der Curven und Flächen zweiter Ordnung und daraus folgenden Sätzen.

Hierauf trug Hr. Kummer folgende von Hrn. Riemann, Correspondenten der Akademie, mittelst eines an den Sekretar Hrn. Encke gerichteten Schreibens vom 19. October d. J. eingesandte Mittheilung „über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Gröſse" vor:

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, daſs ich von der hiedurch erhaltenen Erlaubniſs baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, daſs das Product

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

[1859.] 48

Ritratto di Riemann

La prima pagina del lavoro

SUL NUMERO DI NUMERI PRIMI MINORI DI UNA QUANTITÀ DATA

Porgo i miei ringraziamenti per l'onore che l'Accademia[1] mi ha conferito con la nomina quale corrispondente e ritengo di poter usufruire del permesso ricevuto di poter comunicare una ricerca relativa all'assommare dei numeri primi[2], visto l'interesse che gli stessi Gauss e Dirichlet hanno mostrato per l'argomento per un lungo periodo.

Il mio punto di partenza per tale ricerca è fornito dall'osservazione di Eulero[3] che il prodotto

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}$$

se si sostituiscono a p tutti i numeri primi e a n tutti i numeri interi[4]. Indico la funzione della variabile complessa s che è rappresentata da queste due espressioni, laddove esse convergono, con $\zeta(s)$. Entrambe le espressioni convergono soltanto quando la parte reale di s è maggiore di 1, nel contempo si può trovare facilmente un'espressione per la funzione che rimane valida sempre[5]. Facendo uso dell'equazione[6]

$$\int_0^\infty e^{-nx}\, x^{s-1} dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

si vede innanzitutto che[7]

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$$

Se ora si considera l'integrale

$$\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

da $+\infty$ a $+\infty$ preso in senso positivo attorno a un dominio che include al suo interno il valore 0 ma nessun altro punto di discontinuità dell'integrando, allora si vede facilmente che è uguale a

---

[1] Accademia prussiana delle Scienze di Berlino. Nello stesso anno 1859 Riemann aveva sostituìto, dopo due anni di assistenza straordinaria, il maestro Dirichlet, deceduto in maggio, alla cattedra che era stata di Gauss.

[2] Il presente lavoro è l'unico dell'Autore avente per argomento la teoria dei numeri.

[3] *Introductio in Analysin Infinitorum*, I, Cap. 15.

[4] Si intende positivi, oggi diremmo naturali

[5] È il concetto del prolungamento analitico.

[6] Riemann conserva la notazione che fu di Gauss per la funzione Gamma. Essa è più appropriata, visto che interpola la funzione fattoriale, di quella introdotta da Legendre e oggi prevalente nell'uso, ovvero Γ. La forma nel testo si ottiene dalla definizione standard di Γ effettuando il cambio di variabile che porta x in nx.

[7] Basta sommare i due membri su n e scambiare tra loro l'ordine di somma ed integrazione.

$$\left(e^{-\pi si} - e^{\pi si}\right) \int_{0}^{\infty} \frac{x^{s-1}dx}{e^x - 1},$$

a patto che nella funzione a molti valori $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ il logaritmo di $-x$ viene determinato in maniera da essere reale quando x è negativo. Da qui

$$2\sin\pi s \Pi(s-1)\zeta(s) = i \int_{\infty}^{\infty} \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x - 1},$$

dove l'integrale ha il significato appena specificato[8].

Questa equazione fornisce ora il valore della funzione $\zeta(s)$ per tutti i numeri complessi s e mostra che questa funzione è ad un solo valore e finita per tutti i valori finiti di s con l'eccezione di 1, e anche che vale 0 se s è uguale ad un numero intero pari negativo.

Se la parte reale di s è negativa allora questo integrale, invece di essere percorso nel senso positivo attorno al dominio specificato, può essere anche preso in sendo negativo attorno a quel dominio, includendo tutte le restanti quantità complesse, visto che l'integrale per valori del odulo infinitamente grandi è infinitamente piccolo. Comunque all'interno di questo dominio l'integrando possiede delle discontinuità solo dove x diventa uguale ad un multiplo intero di $\pm 2\pi i$ e l'integrale diventa così uguale alla somma degli integrali presi in senso negativo attorno a questi valori. Ma l'integrale attorno al valore $n2\pi i$ è $= (-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, [9] si ottiene da ciò

$$2\sin\pi s \Pi(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}[(-i)^{s-1} + i^{s-1}],$$

ovvero una relazione tra $\zeta(s)$ e $\zeta(1-s)$ [10] che, mediante l'impiego delle note proprietà della funzione Π, può essere espressa come segue:

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

resta invariata allorché s viene cambiata in 1-s.

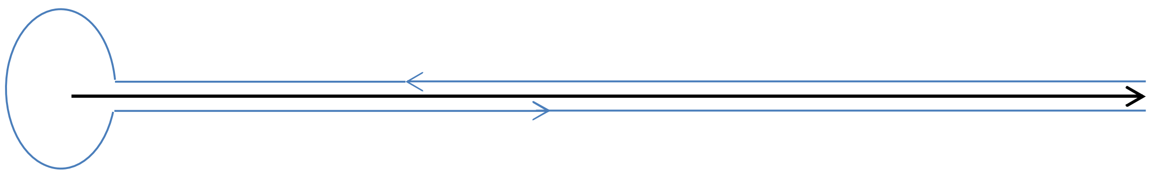
Tale proprietà della funzione mi ha indotto a considerare, in luogo di $\Pi(s-1)$, l'integrale $\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)$ nel termine generale della serie $\sum \frac{1}{n^s}$ dal che si ottiene una espressione molto conveniente per la funzione $\zeta(s)$. Infatti

$$\frac{1}{n^s}\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^{\infty} e^{-nn\pi x} x^{\frac{s}{2}-1}\, dx, \text{ [11]}$$

in modo che, se si pone

---

[8] Si tratta di un integrale nel piano complesso che parte da infinito, percorre l'asse delle scisse verso l'origine appena al di sopra dell'asse stesso, circonda l'origine in senso antiorario e torna all'infinito appena sotto l'asse x (v. figura).



[9] + il valore del residuo attorno alla singolarità, moltiplicato per $2\pi i$.
[10] $\zeta(1-s)$ è la somma delle potenze n^{s-1}.
[11] Ottenuta dalla definizione della funzione Π vista all'inizio utilizzando $s/2$ in luogo di s e $n^2\pi$ in luogo di n.

$$\sum_{1}^{\infty} e^{-nn\pi x} = \psi(x)$$

allora

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

o dal momento che

$$2\psi(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}\left[2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right] \quad \text{(Jacobi, Fund. pag. 184)}$$[12]

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_1^\infty \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1}\,dx + \int_1^\infty \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s-3}{2}}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx\,.$$[13]

Pongo ora $s = \frac{1}{2} + ti$ e

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t),$$

di modo che

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(tt + \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x) x^{\frac{3}{4}} cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{t}\log x\right)dx$$

o, in aggiunta,

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\left[x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right]}{dx} x^{-\frac{1}{4}} cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{t}\log x\right)dx\,.$$[14]

Questa funzione è finita per tutti i valori finiti di *t* e ammette uno sviluppo in serie di potenze di *tt* che converge molto rapidamente. Poiché per un valore di *s* la cui parte reale è maggiore di 1, $\log\zeta(s) = -\sum \log(1-p^{-s})$ rimane finito e poiché lo stesso vale per i logaritmi degli altri fattori di $\xi(t)$, ne segue che la funzione di $\xi(t)$ può annullarsi solo se la parte immaginaria di *t* è compresa tra di $\frac{1}{2}i$ e $-\frac{1}{2}i$. Il numero di radici di $\xi(t) = 0$ le cui parti reali giacciono tra 0 e *T* è approssimativamente

---

[12] *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*, Konigsbeg 1829, par. 65 n. 6.

[13] Nella rivista la prima parte del il primo integrando è scritta erroneamente $(x)\psi$ anziché $\psi(x)$. L'integrale è stato scomposto nella somma sui due intervalli [1, ∞[e [0, 1], nel secondo di questo intervallo si è posto 1/*x*=*y* e si è infine utilizzata l'identità di Jacobi.

[14] Le derivate di $\psi(x)$ sono semplici da calcolare, visto che si tratta di esponenziali.

$$= \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$

in quanto l'integrale $\int d\log\xi(t)$, preso nel senso positivo attorno alla regione costituita dai valori di t le cui parti immaginarie stanno tra $\frac{1}{2}i$ e $-\frac{1}{2}i$ e le cui parti reali stanno tra 0 e T è (a meno di una frazione dell'ordine di grandezza della quantità $\frac{1}{T}$) uguale a $\left(T\log\frac{T}{2\pi} - T\right)i$; questo integrale comunque è uguale al numero di radici di $\xi(t) = 0$ che giacciono in questa regione, moltiplicato per $2\pi i$. Ora, si trova effettivamente tale numero di radici reali entro questi limiti, ed è molto probabile che tutte le radici siano reali[15]. Certamente si desidererebbe qui una prova più rigorosa, ho nel frattempo temporaneamente messo da parte la sua ricerca dopo una serie di sporadici inutili tentativi, visto che appare non necessaria per il prossimo obiettivo della mia ricerca.

Se si indicano con α tutte le radici dell'equazione $\xi(\alpha) = 0$, si può esprimere $\log\xi(t)$ come

$$\sum \log\xi\left(1 - \frac{tt}{\alpha\alpha}\right) + \log\xi(0)$$

in quanto, dal momento che la densità delle radici della quantità t cresce con t solo come $\log\frac{T}{2\pi}$, segue che quella espressione converge e per t infinita diventa infinita solo come $t\log t$; in tal modo essa differisce da $\log\xi(t)$ di una funzione di tt che per t finita rimane continua e finita e che, quando viene divisa per tt, diventa infinitamente piccola[16] per t infinita. Di conseguenza la differenza è una costante il cui valore può essere determinato ponendo t=0.

Con l'aiuto di questi strumenti può essere ora determinato il numero di numeri primi che sono minori di x.

Sia $F(x)$ uguale a questo numero allorché x non è esattamente uguale a un numero primo; ma sia incrementata di ½ quando x è un numero primo, di modo che per qualsiasi x dove ciè un salto nel valore di F(x)

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$$

Se nell'identità

$$\log\xi(s) = -\sum \log(1 - p^{-s}) = \sum p^{-S} + \tfrac{1}{2}\sum p^{-2S} + \tfrac{1}{3}\sum p^{-3S} + \cdots^{17}$$

si sostituisce ora

$$p^{-s} \text{ con } s\int_p^\infty x^{-s-1}ds,\ p^{-2s} \text{ con } s\int_{p^2}^\infty x^{-s-1}ds,\ \ldots,^{18}$$

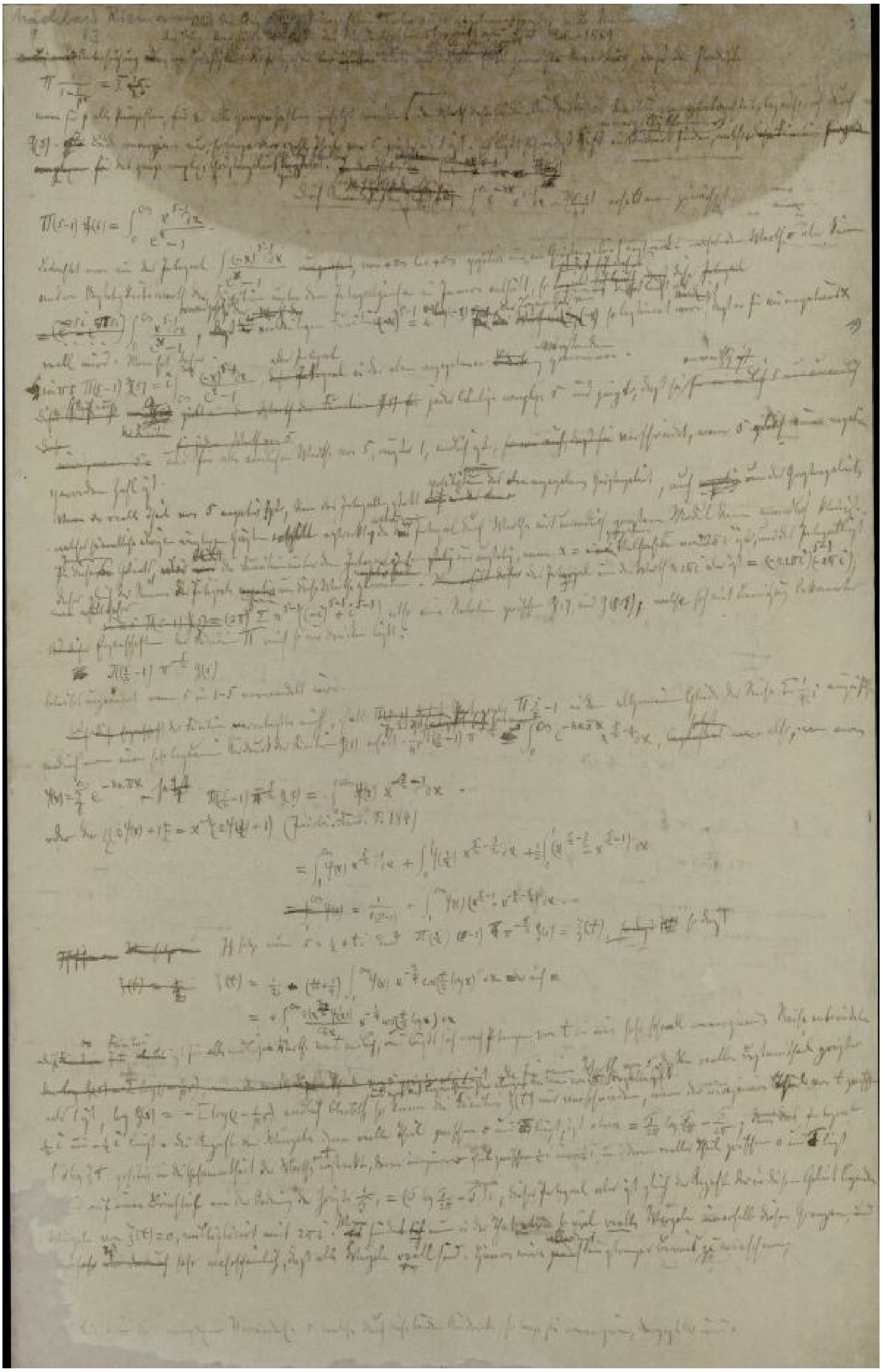
[15] «***Es ist sehr wahrscheinlich, daß alle Wurzeln reell sind***» è la concisa formulazione della celeberrima Ipotesi di Riemann sugli zeri complessi della funzione zeta. Verificata numericamente per i primi miliardi di casi ma né tuttora dimostrata (si veda la frase successiva) né confutata. In un caso o nell'altro le conseguenze sarebbero notevoli per l'intera teoria dei numeri primi.

[16] Ossia un infinitesimo.

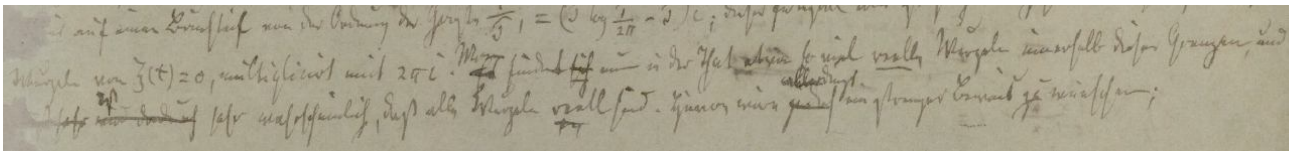
[17] Deriva direttamente dalla identità iniziale stabilita da Eulero, considerando i logaritmi dei due membri e ricordando lo sviluppo in serie di log(1-x) e sommando su tutti i p. La stessa formula fornisce una semplice dimostrazione del fatto che la somma dei reciproci dei numeri primi diverge. Se si pone infatti s=1 allora il primo membro diventa la serie armonica, che diverge, a secondo membro tutte le somme a partire dalla seconda sono convergenti, motivo per il quale la prima somma, che è appunto la serie dei reciproci dei primi, deve anch'essa divergere.

[18] Nelle ipotesi del lavoro, ovvero s>1, e con p>0 per definizione ciascun integrale converge al valore p^{-s}/s.

si ottiene



La pagina manoscritta che contiene il passaggio (ingrandimento)



$$\frac{\log\zeta(s)}{s} = \int_1^{\infty} f(x)x^{-s-1}dx$$

una volta che si indica

$$F(x) + \frac{1}{2}F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}F\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \cdots$$

con $f(x)$.

Questa equazione è valida per ogni valore complesso $a+bi$ di s per il quale $a>1$. Se ora in questo intervallo vale l'equazione

$$g(s) = \int_0^{\infty} h(x)x^{-s}d\log x$$

allora, utilizzando il teorema di Fourier[19], si può esprimere la funzione h in termini della funzione g. L'equazione si scompone, se $h(x)$ è reale e

$$g(a+ib) = g_1(b) + ig_2(b),$$ [20]

nelle seguenti

$$g_1(b) = \int_0^{\infty} h(x)x^{-a}\cos(b\log x)d\log x,$$

$$ig_2(b) = -i\int_0^{\infty} h(x)x^{-a}\sin(b\log x)d\log x.$$

Se si moltiplicano entrambe le equazioni per

$$(\cos(b\log y) + i\sin(b\log y))db$$

e le si integrano tra $-\infty$ e $+\infty$ allora si ottiene in entrambe $\pi h(y)y^{-a}$ al membro di destra in virtù dei teoremi di Fourier; così se si sommano le due equazioni e le si moltiplicano entrambe per iy^{-a} si ottiene

---

[19] Data l'equazione $g(b) = \int_0^{\infty} h(v)e^{-bvi}dv$ con h reale, se $u>0$, moltiplicando i due membri per e^{bui}e integrando in b tra $-\infty$ e $+\infty$ si avrà $\int_{-\infty}^{+\infty} g(b)e^{bui}db = \int_{-\infty}^{+\infty} db \int_0^{\infty} h(v)e^{(u-v)bi}dv = 2\pi h(u)$.
Nel caso in questione $x = e^v$, $h(v) = f(x)x^{-\alpha}$; $g(b) = \frac{\log\zeta s)}{s}$; l'integrale di $g(b)$ diventa $2\pi f(e^u)e^{-u\alpha}$ da cui si ricava f da integrare per parti.

[20] Si sottintende la dipendenza da a, che è evidente nelle due equazioni per le g che seguono immediatamente.

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s) y^s ds,$$

dove l'integrazione viene condotta in maniera tale che la parte reale di s rimane costante.

Per un valore di y per il quale c'è un salto nel valore di $h(y)$ l'integrale assume il valore medio dei valori della funzione h tra le due parti del salto. Per il modo in cui la funzione f è stata definita vediamo che essa ha la medesima proprietà per cui, in tutta generalità[21]

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log\zeta(s)}{s} y^s ds.$$

Si può sostituire a $\log\zeta$ l'espressione

$$\frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1) - \log\Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \sum_\alpha \log\left(1 + \frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha\alpha}\right) + \log\xi(0) \text{ }^{22}$$

trovata prima[23]; ad ogni modo gli integrali dei singoli termini di questa espressione non convergono quando vengono estesi all'infinito, per tale ragione è appropriato trasformare l'equazione precedente attraverso un'integrazione per parti[24] in

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\frac{\log\zeta(s)}{s}}{ds} x^s ds$$

Poiché

$$-\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \lim\left(\sum_{n=1}^{n=m} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2}\log m\right)$$

quando $m=\infty$ e quindi

$$-\frac{d\frac{1}{s}\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_1^\infty \frac{d\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)}{ds}$$

ne segue allora che tutti i termini dell'espressione per $f(x)$ con l'eccezione di

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{ss} \log\xi(0) x^s ds = \log\xi(0)$$

[21] S tratta di un esempio della trasformata di Mellin tra due funzioni:
$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} t^{-z}\phi(z)dz$ e $\phi(z) = \int_0^\infty t^{z-1} g(t)d\,t$. Il ruolo di $\phi(t)$ è qui affidato a $\frac{\log\zeta(t)}{t}$.

[22] Nel manoscritto è rappresentato esplicitamente il simbolo di sommatoria che invece non è presente nell'articolo a stampa.

[23] Si utilizza l'espressione di ξ in funzione di ζ e si uguagli alla somma sulle radici più il valore in 0.

[24] Si utilizza y^s come fattore integrante che restituisce il fattore $1/\log x$.

assumono la forma

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s ds$$

Ma ora

$$\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}=\frac{1}{(\beta-s)\beta}$$

e, se la parte reale di s è maggiore della parte reale di β,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s ds}{(\beta-s)\beta}=\frac{x^\beta}{\beta}=\int_\infty^x x^{\beta-1}dx$$

oppure

$$=\int_0^x x^{\beta-1}dx$$

a seconda che la parte reale di β sia negativa o positiva. Si ottiene come risultato[25]

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s ds$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s ds$$

$$=\int_\infty^x\frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx+\text{cost.}$$

nel primo caso e

$$=\int_0^x\frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx+\text{cost.}$$

nel secondo.

Nel primo caso la costante di integrazione si determina se si impone che la parte reale di β diventa infinitamente negativa; nel secondo caso l'integrale tra 0 e x assume valori separati da $2\pi i$ a seconda che il verso di integrazione sia considerato nel piano complesso con argomento positivo o

[25] Nel primo passaggio di assume quale fattore integrante $\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}$.

negativo, e diventa infinitamente piccolo, per il primo cammino, quando il coefficiente di i nel valore di β diventa infinitamente positivo mentre per il secondo, quando tale coefficiente diventa infinitamente negativo. Da ciò si vede come nel membro a sinistra $\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)$ deve essere determinato in modo che le costanti di integrazione scompaiano.

Inserendo questi valori nell'espressione per $f(x)$ si ottiene[26]

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_\alpha \left(\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right) + \int_\infty^x \frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x} + \log\xi(0).$$

a patto che in Σ_a si sostituiscono ad α tutte le radici positive (o le radici aventi la parte reale positiva) dell'equazione $\xi(\alpha) = 0$ ordinate secondo la loro grandezza[27]. Si può mostrare facilmente, mediante una analisi più approfondita della funzione ξ, che con questo ordinamento dei termini il valore della serie

$$\sum \left(\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right) \log x$$

é in accordo con il valore limite al quale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \frac{d\frac{1}{s}\sum log\left(1+\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha\alpha}\right)}{ds} x^s ds$$

converge quando la quantità b cresce oltre ogni limite; comunque quando si effettua il riordino esso può assumere un qualsiasi valore reale.

Da $f(x)$ si ottiene $F(x)$ mediante inversione[28] della relazione

$$f(x) = \sum \frac{1}{n} F\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

per ottenere l'equazione

$$F(x) = \sum (-1)^\mu \frac{1}{m} f\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

nella quale a m si sostituisce la serie costituita da quei numeri naturali che non siano divisibili per alcun quadrato oltre 1, e dove μ indica il numero di fattori primi di m.

Se si restringe Σ_a ad un numero finito di termini allora la derivata dell'espressione di $f(x)$ o, a meno di una parte che diminuisce molto rapidamente al crescere di x,[29]

---

[26] Riemann scrive erroneamente $\log\xi(0)$ in luogo di $-\log 2$. L'errore fu fatto notare, Riemann ancora vivente, da Angelo Genocchi nel 1860 nell'articolo *Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite*, in *Annali di Matematica pura e applicata* 3, pagg. 52-59. Il valore dell'integrale è massimo, quando l'estremo è x=2 e vale all'incirca 0.14001010114…… La definizione di logaritmo integrale è $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dx}{\log x}$.

[27] Si intende del relativo modulo.

[28] Si tratta della formula di inversione di Möbius tra funzioni aritmetiche.

$$\frac{1}{\log x} - 2\sum^{\alpha} \frac{\cos(\alpha \log x) x^{-\frac{1}{2}}}{\log x}$$

fornisce un'espressione approssimata della densità dei numeri primi + metà della densità dei quadrati + un terzo della densità dei cubi dei numeri primi ecc. fino ad una grandezza x.

La nota espressione approssimata $F(x)$=Li(x) è quindi valida a meno di quantità dell'ordine di $x^{\frac{1}{2}}$ e dà un valore un po' troppo grande[30], in quanto i termini non-periodici[31] nell'espressione di $F(x)$ sono, a meno di quantità che non vanno all'infinito con x: [32]

$$\mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{5}\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{6}\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{6}}\right) - \frac{1}{7}\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{7}}\right) + \cdots$$

In effetti nel confronto tra Li(x) con il numero di numeri primi inferiori a x effettuato da Gasuss e Goldschmidt[33] e condotto sino a x=3 milioni, questo numero si è mostrato essere, nel primo centinaio di migliaia, sempre inferiore a Li(x) in effetti la differenza cresce, con molte fluttuazioni, gradatamente con x.[34] Ma anche la crescita e descrescita nella densità dei primi di luogo in luogo che è dipendente dai termini periodici[35] ha già suscitato molta attenzione senza comunque che sia stata osservata una qualsiasi legge che governi tale comportamento. In ogni conteggio futuro[36] sarebbe interessante tenere traccia dell'influenza dei singoli termini periodici nell'espressione della distribuzione dei numeri primi. Un comportamento più regolare di quello di $F(x)$ sarebbe mostrato dalla funzione $f(x)$, che già nel primo centinaio si vede essere chiaramente in accordo in media con $\mathrm{Li}(x) + \log\xi(0)$.

---

[29] La forma del secondo termine è dovuto al fatto che, sulle somme delle radici ρ, laddove si pone $\rho = \frac{1}{2} + i\alpha$ (e torna la famosa ipotesi che α sia sempre reale): $x^{\rho-1} + x^{-\rho} = x^{-\frac{1}{2}}(x^{-\alpha} + x^{-i\alpha}) = 2x^{-\frac{1}{2}}\cos(\alpha\log x)$.

[30] Per il primo milione di numeri interi, la differenza tra Li(x) e $\pi(x)$ è di 130 unità su 78.498; per il primo miliardo di 1701 su 50.847.534. Se x=10^{15} allora la differenza è 1.052.619 su 29.844.570.422.669; quando x=10^{25} la differenza è 55.160.980.939 su 176.846.309.399.143.769.411.680. L'approssimazione di Riemann al primo termine fornisce i seguenti scarti (ridotti alla parte intera): ad 1 milione di sole +29 unità, ad un miliardo di -79 unità; a 10^{24} di -1.658.989.719 ossia oltre 10 volte migliore del valore fornito dal logaritmo integrale. In realtà l'affermazione non è vera: nel 1914 Littlewood dimostrò che la differenza tra Li(x) e $\pi(x)$ cambia segno infinite volte, la prima delle quali attorno al valore $1.39 \cdot 10^{316}$.

[31] I termini non sono periodici, bensì oscillanti.

[32] La regola per i segni *deriva* dalla citata formula di inversione di Möbius in virtù del fatto che μ è nullo se l'indice n del termine n-simo contiene un fattore quadrato vale è +1 se il numero dei suoi fattori è pari, -1 se è dispari.

[33] Rispettivamente maestro e allievo. Si veda K. F. Gauss: *Tavola della distribuzione dei numeri primi* in *Werke*, vol. 2, pagg. 436-443.

[34] Si veda la nota 30.

[35] Si veda la nota 31.

[36] La fecondità del lavoro di Riemann ha pochi paragoni in tutta la storia della matematica. Hilbert formulò a tal proposito l'ottavo (irrisolto) dei suoi 23 problemi nel 1900. La conseguente bibliografia è sterminata: su tutti suggerisco Bombieri, Enrico (2000), *The Riemann Hypothesis – official problem description*, presso il Clay Mathematics Institute, che contiene buoni riferimenti, l'appassionante, divulgativo a buon livello, Derbyshire J., *L'ossessione dei numeri primi. Bernhard Riemann e il principale problema irrisolto della matematica* (2004) ma soprattutto l'indispensabile Edwards H. M., *Riemann's Zeta Function* (1974).