Su un particolare tipo di medie

Introduciamo una ricorrenza che associa ad un certo insieme di numeri l'esponenziale del logaritmo decimale della somma di quei numeri:

$$w_{n+1} = e^{Log \sum x_{i,n}}$$

Consideriamo ora la doppia successione ricorsiva

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \exp(Log(x_n + y_n)) \end{cases} \qquad x_0, y_0 \ \text{dati} \qquad [1]$$

La doppia successione converge ad un limite comune quando $n \to \infty$; chiamiamo tale limite $\sigma = f(x_0, y_0)$. La funzione f è simmetrica nei suoi argomenti.

Contrariamente a quello che accade per altri tipi di medie del tipo [1] quali la media aritmetico-geometrica o quella aritmetica-armonica, in questo caso succede un fatto singolare: il limite di convergenza della [1] non dipende dai valori x_0, y_0 ma è una costante, che chiamiamo ξ_2. Ciò vale anche se nella [1] utilizziamo la media non di due ma di tre, quattro, cinque, … k termini. Il comportamento non cambia e si ottiene sempre un limite che non dipende dai valori iniziali, ma che è una costante che chiamiamo ξ_k.

Scriviamo innanzitutto una tabella dei primi valori di ξ_k:

k	ξ_k
2	1,70255825682828
3	2,32427747837521
4	2,89870461789415
5	3,44034648003337
6	3,95721781196773
7	4,45435969987604
8	4,93521348130195
9	5,40226579648223
10	5,85739030593092

Si verifica che vale la semplicissima relazione

$$\xi_k = k^s \qquad [2]$$

La costante s è un numero molto particolare; essa infatti è curiosamente (ma poi non tanto, vista la struttura dell'algoritmo [1]) legata alla soluzione di un problema trascendente: qual è quel numero reale il cui logaritmo naturale supera di una unità il logaritmo decimale? In formule si tratta di trovare il valore x tale che

$$\ln x - \mathrm{Log}\, x = 1$$

la soluzione del problema è semplice: basta trasformare il logaritmo decimale nel corrispondente naturale:

$$\ln x - \frac{\ln x}{\ln 10} = \ln x\left(1 - \frac{1}{\ln 10}\right) = 1$$

$$\ln x = \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln 10}}$$

$$x = \exp\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\ln 10}}\right) \approx 5.85739030593092$$

$$\ln x = 1.76770416411066$$

ed infine

$$s = Log x = \ln x - 1 \approx 0.767704164110659621 66 \qquad [3]$$

Dimostriamo che tale valore è lo stesso della [2]. Ripartiamo quindi dall'algoritmo [1]; dopo un sufficiente numero di iterazioni avremo che i due valori x_n e y_n differiranno tra loro di una quantità molto piccola, avremo quindi $x_n = y_n + \varepsilon$ e

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{2y_n + \varepsilon}{2} \\ y_{n+1} = \exp(Log(2y_n + \varepsilon)) \end{cases}$$

queste quantità sono uguali se

$$y + \frac{\varepsilon}{2} = \exp(Log(2y + \varepsilon))$$

$$\ln\left(y + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\ln(2y + \varepsilon)}{\ln 10}$$

$$\left(y + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\ln 10} = (2y + \varepsilon)$$

$$y^{\ln 10}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2y}\right)^{\ln 10} = (2y + \varepsilon)$$

$$y^{\ln 10}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2y \ln 10}\right) = (2y + \varepsilon)$$

posto

$$y = 2^s \qquad [4]$$

abbiamo

$$2^{s \ln 10}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{s \ln 10 + 1} \ln 10}\right) = (2^{s+1} + \varepsilon)$$

$$2^{s \ln 10}\left(2^{s \ln 10 + 1} \ln 10 + \varepsilon\right) = 2^{s \ln 10 + 1} \ln 10 \cdot (2^{s+1} + \varepsilon)$$

$$2^{2s \ln 10 + 1} \ln 10 + \eta = 2^{s \ln 10 + 2 + s} \ln 10 \cdot (1 + \varepsilon)$$

e, trascurando gli infinitesimi ε ed η,

$$2^{2s \ln 10 + 1} = 2^{s \ln 10 + 2 + s}$$

$$2s\ln 10 + 1 = s\ln 10 + 2 + s$$

$$s = \frac{1}{\ln 10 - 1}$$

che è esattamente la [3], come dovevasi dimostrare.

Il ragionamento vale per qualsiasi numero k di addendi, a patto di porre nella [4] $y=k^s$.