Sempre la lemniscata

Dall'equazione cartesiana

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$$

euivalente alla polare

$$\rho^2 = \cos 2\theta$$

per cui

$$\begin{cases} x = \cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} \\ y = \sin\ \theta\sqrt{\cos 2\theta} \end{cases}$$

si ricava l'espressione esplicita per il ramo contenuto nel primo quadrante

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1} - 2x^2 - 1}{2}}$$

La sua derivata è

$$y' = -\frac{2x\sqrt{8x^2+1} - 4x}{\sqrt{2}\sqrt{8x^2+1}\sqrt{\sqrt{8x^2+1} - 2x^2 - 1}}$$

Che si annulla nel punto $T\colon\left(\sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{1}{8}}\right)$ di modo che abbiamo la lunghezza della corda $CT = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La corda è il doppio dell'ordinata e quindi, come dice il Marchigiano[1], «la maggiore delle ordinate HT è suddupla della corda, che le corrisponde» ed il triangolo CTS della fig. 28 è equilatero.

L'area della lemniscata misurata secondo l'asse polare che spazza un angolo α è

$$A(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\cos 2\theta d\theta = \frac{1}{4}\sin 2\alpha = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\rho^4}\right)$$

e passando alle coordinate cartesiane

$$A(x) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\rho^4}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1} - 4x^2 + 1}{2}}$$

[1] Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano, nelle sue "*Produzioni Matematiche*", raccolta del 1750.

che è una espressione algebrica. In particolare $A(\alpha = 0) = A(x = 1) = \frac{1}{4}$ è l'area del petalo contenuto nel primo quadrante. L'area sottesa dal punto T è $A(T) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\rho_T{}^4}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\mathrm{CT}^4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

La bisezione dell'arco contenuto ben primo quadrate, e che è lungo $\frac{\varpi}{2}$ è realizzabile mediante operazioni algebriche.

L'elemento di lunghezza di arco della lemniscata è

$$\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

Data quindi l'equazione differenziale

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

un suo integrale particolare è

$$u = \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1+z^2}}$$

ed il suo punto di bisezione si ha quando $z = u$ ovvero

$$z^2 = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

La bisezione si ha per $z = u = \sqrt{\sqrt{2}-1} = CB$ (fig. 24)

quindi

$$\rho^2 = \sqrt{2} - 1 = \cos 2\theta$$

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{acos}(\sqrt{2}-1)$$

L'area sottesa dal punto di bisezione è $A(B) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\rho_B{}^4}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\mathrm{CB}^4}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$

Dall'equazione

$$\frac{\sqrt{1-t^4}}{\sqrt{2}t} = \frac{1}{z}\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\frac{2dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

che ci dice che il secondo elemento di arco è doppio del primo, facendo coincidere quindi t e z troviamo il punto che divide l'arco in tre parti uguali:

$$\frac{\sqrt{1-z^4}}{\sqrt{2}z}=\frac{1}{z}\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}}$$

ovvero

$$\frac{1-z^4}{2}=1-\sqrt{1-z^4}$$

e infine (fig. 31)

$$z=\sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}=CT$$

di conseguenza

$$\rho^2=\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\cos 2\theta$$

$$\theta=\frac{1}{2}\text{acos}\sqrt{2\sqrt{3}-3}$$

L'area sottesa è $A(T)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\rho_T{}^4}\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\mathrm{CB}^4}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

Con riferimento alla fig. 29, con la posizione

$$CS=z=\frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$$

Sappiamo che l'arco CS è il doppio dell'arco CI. Poi sia $CO=r$, se

$$CI=u=\frac{2r\sqrt{1-r^4}}{1+r^4}$$

allora l'arco CI è il doppio dell'arco OL, quindi l'arco CS è il quadruplo dell'arco OL. Se quindi si portano a far coincidere in T i punti S ed O, l'arco TL sarà 1/5 del quadrante :

$$CS(z)=CO(r)$$

L'arco CI ne conterrà 2/5 e l'arco CO=arco CI ne conterrà altri 2/5. Se si prende l'arco EL uguale all'arco CI (fig. 32), l'arco CB uguale all'arco TL allora i punti B, I, E, T taglieranno il quadrante in cinque archi uguali tra lori e pari tutti a 1/5 dell'intero. La corda CT è la maggiore soluzione dell'equazione che si ottiene dalla formula di duplicazione

$$u=\frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}$$

ponendo tale valore nell'espressione di

$$z=\frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$$

ed uguagliando l'espressione alla corda *z* avremo

$$z=\frac{4z\sqrt{1-z^4}\sqrt{1-\frac{16z^4(1-z^4)^2}{(1+z^4)^4}}}{(1+z^4)\left[1+\frac{16z^4(1-z^4)^2}{(1+z^4)^4}\right]}$$

I due membri si possono dividere per z e semplificare di un fattore $(1+z^4)^2$ ne emerge una equazione di ottavo grado in z^4 che però, posto $h=z^4$ sebbene ancora di otta vo grado in h diventa fattorizzabile in

$$(h+1)^4(h^2-2h+5)(h^2+6h-3)=0$$

che ha le radici reali positive tutte algebricamente costruibili e pari a

$$2\sqrt{3}-3,\quad 6\sqrt{5}-13\pm\frac{\sqrt{1360-608\sqrt{5}}}{2}$$

È così dimostrato (e trovato esplicitamente) che la curva lemniscata si può dividere in 2, 3 5 parti con riga e compasso.

È chiaro pure che si possono trovare valori approssimati degli angoli sottesi da archi aventi un qualsiasi rapporto dato con la lunghezza di un quadrante.

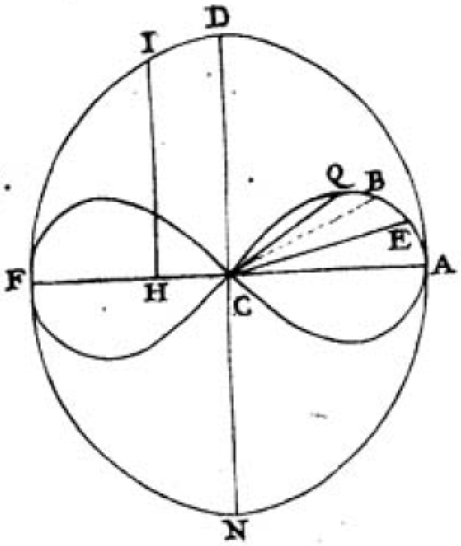
In tabelle riporto l'angolo formato con l'asse x della retta che congiunge l'origine al punto che divide il quadrante in k parti uguali

k	*arco*
1	45°
2	28°43'
3	36°28'
4	39°46'
5	41°29'
6	42°29'
7	43°7'
8	43°32'
9	43°50'
10	44° 3'

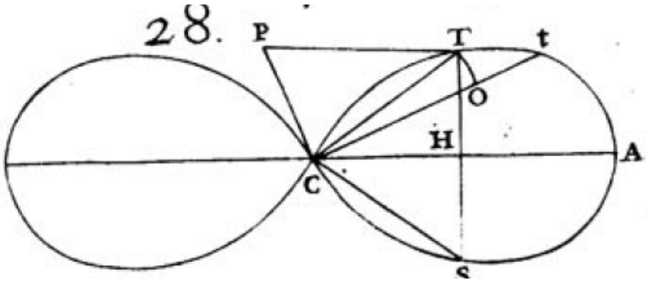
L'angolo di 30 divide l'arco in rapporto 47,4:100. L'angolo di 36° in rapporto 34,44:100.

FIGURE[2]

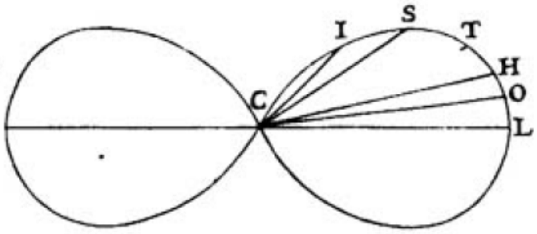
24.



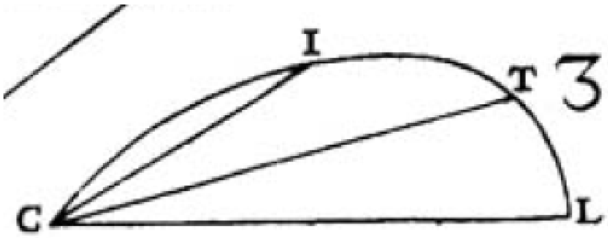
28.



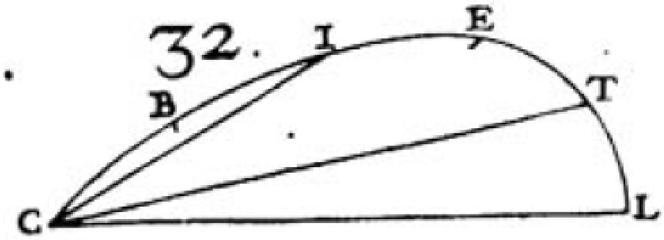
29.



31.



32.



[2] In *Produzioni Matematiche*, Tomo II, Schediasmi, Tav. III. Rif. "*Giornale de' Letterati d'Italia*" , Tomo XXIX, pag. 258.