RICERCHE SULLE FUNZIONI ELLITTICHE

Niels Heinrich Abel

Traduzione e note di Carmine Suriano (2018)

Parte I

Journal fur die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von Crelle, Bd. 2, 3. Berlin 1827, 1828.

Per lungo tempo le funzioni logaritmiche, le esponenziali e le circolari sono state le sole funzioni trascendenti che hanno attirato l'attenzione dei matematici. È solo negli ultimi tempi che si è iniziato a considerarne altre. Tra queste dobbiamo distinguere le funzioni chiamate ellittiche sia per le loro belle proprietà analitiche sia per le loro applicazioni nei vari rami della matematica. Una prima idea di tali funzioni è stata data dall'immortale *Euler* quando ha dimostrato[1] che l'equazione a variabili separabili

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}=0$$

è integrabile algebricamente. Dopo *Euler*, *Lagrange* ha aggiunto alcune cose fornendo la sua elegante teoria[2] della trasformazione dell'integrale $\int\frac{R.dx}{\sqrt{(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)}}$ dove R è una funzione razionale di x. Ma il primo e, se non vado errato, l'unico che ha approfondito la natura di tali funzioni è il Sig. *Legendre* il quale prima in una memoria sulle funzioni ellittiche[3], e poi nei suoi eccellenti Esercizi di matematici, ha sviluppato un gran numero di eleganti proprietà di queste funzioni, e ne ha mostrato l'applicazione. Dalla pubblicazione di tale lavoro non è stato aggiunto nulla alla teoria di *Legendre*. Io credo che non si vedranno senza piacere ulteriori ricerche su tali funzioni.

In generale vengono indicate con la denominazione di funzioni ellittiche tutte le funzioni rappresentate dall'integrale

---

[1] Nella memoria *De integratione aequationis differentialis* $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$ [E251] in *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 6, 1761, pp. 37-57. L'integrale generale della forma biquadratica normalizzata $\frac{dz}{\sqrt{1+mz^2+nz^4}}$ è $0=cc-xx-yy+nccxxyy+2xy\sqrt{1+mcc+nc^4}$.

[2] Nella memoria ella memoria *Sur un nouvelle méthode de calcul intégral* ect.in *Mémoire de l'Academie Reale des Sciences de Turin*, II, 1784–1785, Oeuvres, 2, pp. 253–312]

[3] I risultati sono raccolti nei tre volumi del *Traité_des_fonctions_elliptiques et des intégrales eulériennes* (1825-1828) . Egli ha ridotto gli integrali ellittici alle tre forme standard che cita Abel subito dopo. Il primo lavoro di Legendre sull'argomento risale al 1793: *Mémoire sur les transcendantes elliptiques*.

$$\int \frac{Rdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}} ,$$

ove R è una funzione razionale e α, β, γ, δ e sono quantità costati e *reali*. Il Sig. *Legendre* ha dimostrato che mediante opportune sostituzioni si può sempre ricondurre questo integrale alla forma

$$\int \frac{Pdy}{\sqrt{a+by^2+cy^4}} ,$$

dove P è una funzione razionale di y^2. Con opportune sostituzioni questo integrale può essere inoltre riportato alla forma

$$\int \frac{A+By^2}{C+Dy^2} \frac{dy}{\sqrt{a+by^2+cy^4}} ,$$

e questa a

$$\int \frac{A+B\sin^2\theta}{C+D\sin^2\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}} ,$$

dove c è reale e minore dell'unità.

Ne segue che ogni funzione ellittica può essere ricondotta a una delle tre forme:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}} , \quad \int d\theta\sqrt{1-c^2\sin^2\theta} , \quad \int \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}} ,$$

alle quali il Sig. *Legendre* dà i nomi di funzioni ellittiche di prima, seconda e terza specie[4]. Sono queste tre funzioni che il Sig. *Legendre* ha considerato, soprattutto la prima, che ha le proprietà più importanti e semplici.

Io mi propongo nella presente memoria di considerare la funzione inversa[5], ovvero la funzione[6] $\varphi\alpha$ determinata dalle equazioni

$$\alpha = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}},$$

$$\sin\theta = \varphi\alpha = x .$$

L'ultima equazione dà

$$d\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = d(\varphi\alpha) = dx,$$

[4] In realtà fino ad ora non si è parlato altro che di integrali e non di funzioni ellittiche, che saranno introdotte a breve.
[5] Questo approccio costituisce una vera rivoluzione, che rende d'un tratto del tutto obsoleto il monumentale lavoro di Legendre.
[6] L'Autore non usa la parentesi, in effetti è $\varphi(\alpha)$. La notazione è semplificata solo nel caso di variabile singola e reale.

dal che

$$\alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

il Sig. *Legendre* suppone c^2 positivo, ma io ho sottolineato che le formule diventano più semplici se si suppone c^2 negativo, uguale a $-e^2$. Inoltre per maggior simmetria scrivo $1-c^2x^2$ in luogo di $1-x^2$ di modo che la funzione $\varphi\alpha = x$ sarà data dall'equazione

$$\alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

oppure[7]

$$\varphi'\alpha = \sqrt{(1-c^2\varphi^2\alpha)(1+e^2\varphi^2\alpha)}.$$

Per brevità introduco due altre funzioni di α ossia

$$f\alpha = \sqrt{1-c^2\varphi^2\alpha};\quad F\alpha = \sqrt{1+e^2\varphi^2\alpha}\,.$$ [8]

Diverse proprietà di tali funzioni si deducono immediatamente dalle proprietà note della funzione ellittica di prima specie, ma altre sono più nascoste. Per esempio noi mostriamo che le equazioni $\varphi\alpha = 0$, $f\alpha = 0$, $F\alpha = 0$ hanno un numero infinito di radici ciascuna delle quali può essere trovata. Una delle proprietà più notevoli è che si può esprimere razionalmente $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$ (essendo *m* un numero intero) in funzione di $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Quindi non v'è nulla di più semplice che trovare $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$ una volta note $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$; ma il problema inverso, ossia determinare $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ in funzione di $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$ è più difficile, dal momento che ciò dipende da un'equazione di grado elevato (ovvero di grado m^2).

La risoluzione di questa equazione è l'oggetto principale della presente memoria. Per prima cosa mostreremo come possiamo trovare tutte le radici mediante le funzioni φ, f, F. Si tratterà poi della risoluzione algebrica dell'equazione in questione e si perverrà al notevole risultato che $\varphi\frac{\alpha}{m}$, $f\frac{\alpha}{m}$,$F\frac{\alpha}{m}$ possono essere espresse in funzione di $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ attraverso una formula che, rispetto ad

[7] La relazione segue immediatamente dall'espressione della derivata della funzione inversa: abbiamo $x=\varphi(\alpha)$ per cui $\frac{dx}{d\alpha} = \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{\frac{d\alpha}{dx}}$ ma $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$ ossia $\frac{dx}{d\alpha} = \sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}$; da qui il testo.

[8] Ovvero $\varphi'\alpha = f\alpha.F\alpha$. Dalle equazioni costituenti abbiamo anche $f'\alpha = -c^2\varphi\alpha.F\alpha$ e $F'\alpha = +e^2\varphi\alpha.f\alpha$ che sono le eqq. [9]. Tali relazioni costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali nelle tre incognite $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Dividendole membro a membro e integrandole abbiamo: $\begin{cases} f^2+c^2\varphi^2 = c_1 \\ F^2-e^2\varphi^2 = c_2 \\ e^2f^2+c^2F^2 = c_3 \end{cases}$. Le tre costanti c_k si determinano facilmente, ad esempio calcolando il valore nell'origine, per cui: $\begin{cases} f^2+c^2\varphi^2 = 1 \\ F^2-e^2\varphi^2 = 1 \\ e^2f^2+c^2F^2 = c^2+e^2 \end{cases}$.

α, non contiene altre irrazionalità se non dei radicali. Ciò fornisce una classe molto generale di equazioni che sono risolubili algebricamente. Va sottolineato che le espressioni delle radici contengono delle quantità costanti che, in generale, non sono esprimibili mediante espressioni algebriche. Queste quantità costanti dipendono da un'equazione di grado $m^2 - 1$. Si farà vedere come mediante funzioni algebriche, si possa ricondurre la soluzione a quella di un'equazione di grado *m*+1. Daremo alcune espressioni delle funzioni $\varphi(2n+1)\alpha$, $f(2n+1)\alpha$, $F(2n+1)\alpha$ in funzione di $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Si dimostrerà che queste funzioni possono essere sviluppate mediante un prodotto infinito di fattori come pure in infinite frazioni parziali.

§I.

Proprietà fondamentali delle funzioni $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

1.

Supponiamo che

[1] $$\varphi\alpha = x,$$

in virtù di quanto detto si avrà

[2] $$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} .$$

Da questo vediamo che α, considerata come funzione di *x*, è positiva da $x = 0$ fino a $x = \frac{1}{c}$. Ponendo dunque[9]

[3] $$\frac{\omega}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} .$$

è evidente che $\varphi\alpha$ è positiva e va aumentando da $\alpha = 0$ fino a $\alpha = \frac{\omega}{2}$, e che si avrà

[4] $$\varphi(0) = 0 , \quad \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{c} .$$

Dal momento che α cambia di segno allorché scriviamo - *x* in luogo di *x*, lo stesso avviene per la funzione $\varphi\alpha$ rispetto ad α e di conseguenza s'avrà l'equazione

[5] $$\varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha) .$$

Ponendo nella [1] *xi* in luogo di *x* (ove *i*, per brevità, rappresenta la quantità immaginaria $\sqrt{-1}$) ed indicando il valore di α con βi , verrà

[9] La scelta di avere un valore diviso per 2 è fatta naturalmente per ricondursi al caso in cui *e*=0, *c*=1 per il quale $\omega = \pi$ e la teoria si riduce a quella delle funzioni circolari.

[6] $$xi = \varphi(\beta i) \quad \text{e} \quad \beta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)}} \, .$$

β è reale e positivo da $x = 0$ fino a $x = \frac{1}{e}$, dunque ponendo

[7] $$\frac{\varpi}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} \, .$$

x sarà positivo $\beta = 0$ fino a $\beta = \frac{\varpi}{2}$, il che è dire che la funzione $\frac{1}{i}\varphi(\beta i)$ sarà positiva tra gli stessi limiti. Ponendo $\beta = \alpha$ e $y = \frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ si ha

$$\alpha = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-e^2y^2)(1+c^2y^2)}}$$

vediamo dunque che, riscrivendo c in luogo di e ed e al posto di c,

$\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ si cambierà in $\varphi\alpha$.

E poiché

$$f\alpha = \sqrt{1 - c^2\varphi^2\alpha},$$

$$F\alpha = \sqrt{1 + e^2\varphi^2\alpha},$$

si vede che con il cambiamento di c in e e di e in c, $f(\alpha i)$ e $F(\alpha i)$ si cambiano rispettivamente in $F\alpha$ e $f\alpha$. Infine le equazioni [3] e [7] fanno vedere che mediante la medesima trasformazione ω e ϖ si cambiano rispettivamente in ϖ e ω .

A causa della formula [7] si avrà $x = \frac{1}{e}$ quando $\beta = \frac{\varpi}{2}$, quindi in virtù dell'equazione $xi = \varphi(\beta i)$ verrà

[8] $$\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\right) = i \cdot \frac{1}{e} \quad .$$

2.

In virtù di quanto detto, si avranno i valori di $\varphi(\alpha)$ per tutti i valori reali di α compresi tra $-\frac{\omega}{2}$ e $+\frac{\omega}{2}$ e per tutti i valori immaginari della forma βi di tale quantità se β è una quantità compresa tra i limiti $-\frac{\varpi}{2}$ e $+\frac{\varpi}{2}$. Non resta che trovare il valore di questa funzione per un valore qualsiasi, reale o immaginario[10], della variabile. Per fare questo dobbiamo innanzitutto stabilire alcune proprietà fondamentali delle funzioni φ, f ed F.

Avendosi

$$f^2\alpha = 1 - c^2\varphi^2\alpha,$$

$$F^2\alpha = 1 + e^2\varphi^2\alpha,$$

si avrà, differenziando,

$$f\alpha . f'\alpha = -c^2\varphi\alpha . \varphi'\alpha,$$

$$F\alpha . F'\alpha = e^2\varphi\alpha . \varphi'\alpha.$$

Ora, in seguito alla [2] si ha[11]

$$\varphi'\alpha = \sqrt{(1 - c^2\varphi^2\alpha)(1 + e^2\varphi^2\alpha)} = f\alpha . F\alpha,$$

dunque sostituendo questo valore di $\varphi'\alpha$ nelle due espressioni precedenti si troverà che le funzioni $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ sono legate tra loro dalle equazioni[12]

$$[9] \qquad \begin{cases} \varphi'\alpha = f\alpha . F\alpha \\ f'\alpha = -c^2\varphi\alpha . F\alpha \\ F'\alpha = e^2\varphi\alpha . f\alpha \end{cases}$$

Fatto questo, io dico che indicando con α e β due indeterminate si avrà

$$[10] \qquad \begin{cases} \varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varphi\alpha . f\beta . F\beta + \varphi\beta . f\alpha . F\alpha}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta} \\ f(\alpha + \beta) = \frac{f\alpha . f\beta - c^2\varphi\alpha . \varphi\beta . F\alpha . F\beta}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta} \\ F(\alpha + \beta) = \frac{F\alpha . F\beta + e^2\varphi\alpha . \varphi\beta . f\alpha . f\beta}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta} \end{cases}$$

Queste formule possono essere dedotte sulla base delle proprietà conosciute delle funzioni ellittiche (*Legendre*, Esercizi di calcolo integrale[13]); ma esse si posso anche verificare facilmente nella maniera seguente.

Indicando con r il secondo membro della prima delle equazioni [10] si avrà, differenziando rispetto ad α,

---

[10] Si intende immaginario puro.
[11] Si veda la nota 7.
[12] Si noti la stretta somiglianza con la formulazione jacobiana delle relazioni che legano tra loro le funzioni ellittiche sn u, cn u, dn u ottenibili dalle abeliane ponendo $c^2 = k^2$, $e^2 = -1$.
[13] *Exercices de calcul intégral* (1811-1816) in tre volumi. La prima delle tre parti del tomo I è dedicata all'argomento in questione.

$$\frac{dr}{d\alpha}=\frac{\varphi'\alpha.f\beta.F\beta+\varphi\beta.F\alpha.f'\alpha+\varphi\beta.f\alpha.fF'\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}-\frac{(\varphi\alpha.f\beta.F\beta+\varphi\beta.f\alpha.F\alpha)2e^2c^2\varphi\alpha.\varphi^2\beta.\varphi'\alpha}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)^2}\,.$$

Sostituendo a $\varphi'\alpha$, $f'\alpha$, $F'\alpha$ i loro valori dati dalle equazioni [9], verrà

$$\frac{dr}{d\alpha}=\frac{f\alpha.F\alpha.f\beta.F\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}-\frac{2e^2c^2\varphi\alpha.\varphi^2\beta.f\alpha.f\beta.F\alpha.F\beta}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)^2}$$

$$+\frac{\varphi\alpha.\varphi\beta.(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)(-c^2F^2\alpha+e^2f^2\alpha)-2e^2c^2\varphi\alpha.\varphi\beta.\varphi^2\beta.f^2\alpha.F^2\alpha}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)^2}$$

Donde, sostituendo a $f^2\alpha$ e $F^2\alpha$ i loro valori $1-c^2\varphi^2\alpha$, $1+e^2\varphi^2\alpha$ e riducendo, si ha

$$\frac{dr}{d\alpha}=\frac{(1-e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)[(e^2-c^2)\varphi\alpha.\varphi\beta+f\alpha.f\beta.F\alpha.F\beta]-2e^2c^2\varphi\alpha.\varphi\beta(\varphi^2\alpha+\varphi^2\beta)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)^2}\,.$$

Dal momento che α e β compaiono in maniera simmetrica nell'espressione di r si otterrà il valore di $\frac{dr}{d\beta}$ permutando α con β nel valore di $\frac{dr}{d\alpha}$. Ora l'espressione di $\frac{dr}{d\alpha}$ non muta valore quindi si avrà

$$\frac{dr}{d\alpha}=\frac{dr}{d\beta}\,.$$

Questa equazione alle derivate parziali mostra che r è una funzione di $\alpha+\beta$; si avrà quindi

$$r=\psi(\alpha+\beta).$$

La forma della funzione ψ si trova attribuendo a β un valore particolare. Supponendo per esempio $\beta=0$ e ricordando che $\varphi(0)=0$, $f(0)=1$, $F(0)=1$ i due valori di r diventeranno

$$r=\varphi\alpha \quad \text{e} \quad r=\psi\alpha\,,$$

dunque

$$\varphi\alpha=\psi\alpha,$$

donde

$$r=\psi(\alpha+\beta)=\ \varphi(\alpha+\beta).$$

E la prima delle formule [10] sussiste effettivamente.

Alla stessa maniera si verificano le altre due formule.

Dalle formule [10] si ne possono dedurre molte altre. Ne riporto le più interessanti. Per brevità pongo

[11] $$1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta = R\ .$$

Cambiando innanzitutto il segno di β si ottiene[14]

[12] $$\begin{cases} \varphi(\alpha+\beta)+\varphi(\alpha-\beta)=\frac{2\varphi\alpha.f\beta.F\beta}{R} \\ \varphi(\alpha+\beta)-\varphi(\alpha-\beta)=\frac{2\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{R} \\ f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)=\frac{2f\alpha.f\beta}{R} \\ f(\alpha+\beta)-f(\alpha-\beta)=\frac{-2c^2\varphi\alpha.\varphi\beta.F\alpha.F\beta}{R} \\ F(\alpha+\beta)+F(\alpha-\beta)=\frac{2F\alpha.F\beta}{R} \\ F(\alpha+\beta)-F(\alpha-\beta)=\frac{2e^2\varphi\alpha.\varphi\beta.f\alpha.f\beta}{R} \end{cases}$$

Formando il prodotto di $\varphi(\alpha+\beta)$ con $\varphi(\alpha-\beta)$ si trova

$$\varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varphi\alpha.f\beta.F\beta+\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{R}\,\frac{\varphi\alpha.f\beta.F\beta-\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{R}$$
$$=\frac{\varphi^2\alpha.f^2\beta.F^2\beta-\varphi^2\beta.f^2\alpha.F^2\alpha}{R^2}$$

ossia, sostituendo i valori di $f^2\beta$, $F^2\beta$, $f^2\alpha$, $F^2\alpha$ per $\varphi\beta$ e $\varphi\alpha$,

$$\varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varphi^2\alpha-\varphi^2\beta-e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^4\beta+e^2c^2\varphi^2\beta.\varphi^4\alpha}{R^2}$$
$$=\frac{(\varphi^2\alpha-\varphi^2\beta)(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)}{R^2}$$

ora $R=1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta$ per cui

[13] $$\varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varphi^2\alpha-\varphi^2\beta}{R}.$$

Si trova parimenti che

[14] Sono le formule di "prostaferesi" per le funzioni ellittiche.

$$[14]\quad \begin{cases} f(\alpha+\beta).f(\alpha-\beta)=\frac{f^2\alpha-c^2\varphi^2\beta.F^2\alpha}{R}=\frac{f^2\beta-c^2\varphi^2\alpha.F^2\beta}{R} \\ =\frac{1-c^2\varphi^2\alpha-c^2\varphi^2\beta-c^2e^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R}=\frac{f^2\alpha.f^2\beta-c^2(c^2+e^2)\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R} \\ F(\alpha+\beta).F(\alpha-\beta)=\frac{F^2\alpha+e^2\varphi^2\beta.f^2\alpha}{R}=\frac{F^2\beta+e^2\varphi^2\alpha.f^2\beta}{R} \\ =\frac{1+e^2\varphi^2\alpha+e^2\varphi^2\beta-e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R}=\frac{F^2\alpha.F^2\beta-e^2(c^2+e^2)\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R} \end{cases}$$

4.

Ponendo nelle formule [10] $\beta=\pm\frac{\omega}{2}$, $\beta=\pm\frac{\varpi}{2}i$, e ricordando che $f\left(\pm\frac{\omega}{2}\right)=0$, $F\left(\pm\frac{\omega}{2}i\right)=0$, si avrà

$$[15]\quad \begin{cases} \varphi\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right)=\pm\varphi\frac{\omega}{2}.\frac{f\alpha}{F\alpha}; \quad f\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right)=\mp\frac{F\frac{\omega}{2}}{\varphi\frac{\omega}{2}}.\frac{f\alpha}{F\alpha}; \\ F\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right)=\frac{F\frac{\omega}{2}}{F\alpha}; \\ \varphi\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=\pm\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right).\frac{F\alpha}{f\alpha}; \quad F\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=\mp\frac{f\left(\frac{\varpi}{2}i\right)}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right)}.\frac{\varphi\alpha}{f\alpha}; \\ f\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=\frac{f\left(\frac{\varpi}{2}i\right)}{f\alpha}; \end{cases}$$

orbene

$$[16]\quad \begin{cases} \varphi\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right)=\pm\frac{1}{c}\frac{f\alpha}{F\alpha}; \quad f\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right)=\mp\sqrt{e^2+c^2}\frac{f\alpha}{F\alpha}; \\ F\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\sqrt{e^2+c^2}}{c}\frac{1}{F\alpha}; \\ \varphi\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=\pm\frac{i}{e}\frac{F\alpha}{f\alpha}; \quad F\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=\pm i\sqrt{e^2+c^2}\frac{\varphi\alpha}{f\alpha}; \\ f\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=\frac{\sqrt{e^2+c^2}}{c}\frac{1}{f\alpha}; \end{cases}$$

$$[17]\quad \begin{cases} \varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)=\varphi\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right); \quad f\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)=-f\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right); \\ F\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)=F\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right); \\ \varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)=\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i-\alpha\right); \quad F\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)=-F\left(\frac{\varpi}{2}i-\alpha\right); \\ f\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)=f\left(\frac{\varpi}{2}i-\alpha\right); \end{cases}$$

[18]
$$\begin{cases} \varphi\left(\alpha \pm \frac{\omega}{2}\right)\varphi\left(\alpha + \frac{\varpi}{2}i\right) = \pm\frac{i}{ce}; \quad F\left(\alpha \pm \frac{\omega}{2}\right)F\alpha = \frac{\sqrt{e^2+c^2}}{c}; \\ f\left(\alpha \pm \frac{\varpi}{2}i\right)f\alpha = \frac{\sqrt{e^2+c^2}}{e} \end{cases}$$

Facendo $\alpha = \frac{\omega}{2}$ e $\frac{\varpi}{2}i$, si ha immediatamente

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}, \quad \varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}, \quad \varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}.$$

Mettendo poi nelle prime tre equazioni [17] $\alpha + \frac{\omega}{2}$ al posto di α e nelle ultime tre $\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i$ al posto di α si ottengono le seguenti

[19]
$$\begin{cases} \varphi(\alpha+\omega) = -\varphi\alpha; \quad f(\alpha+\omega) = -f\alpha; \quad F(\alpha+\omega) = F\alpha; \\ \varphi(\alpha+\varpi i) = -\varphi\alpha; \quad f(\alpha+\varpi i) = f\alpha; \quad F(\alpha+\varpi i) = -F\alpha \end{cases}$$

e ponendo $\alpha+\omega$ e $\alpha+\varpi i$ al posto di α

[20]
$$\begin{cases} \varphi(2\omega+\alpha) = \varphi\alpha; \quad \varphi(2\varpi i+\alpha) = \varphi\alpha; \quad \varphi(\omega+\varpi i+\alpha) = \varphi\alpha \\ f(2\omega+\alpha) = f\alpha; \quad f(\varpi i+\alpha) = f\alpha; \\ F(\omega+\alpha) = F\alpha; \quad F(2\varpi i+\alpha) = F\alpha. \end{cases}$$

Queste equazioni fanno vedere che le funzioni $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ sono delle funzioni *periodiche*[15]. Senza alcuna fatica si deducono le seguenti, ove *m* e *n* sono due numeri interi positivi o negativi

[21]
$$\begin{cases} \varphi[(m+n)\omega+(m-n)\varpi i+\alpha] = \varphi\alpha; \\ \varphi[(m+n)\omega+(m-n+1)\varpi i+\alpha] = -\varphi\alpha; \\ f(2m\omega+n\varpi i+\alpha) = f\alpha; \quad f[(2m+1)\omega+n\varpi i+\alpha] = -f\alpha; \\ F(m\omega+2n\varpi i+\alpha) = F\alpha; \quad F[m\omega+(2n+1)\varpi i+\alpha] = -F\alpha. \end{cases}$$

Queste formule possono infine essere scritte come segue:

[22]
$$\begin{cases} \varphi(m\omega+n\varpi i\pm\alpha) = \pm(-1)^{m+n}\varphi\alpha; \\ f(m\omega+n\varpi i\pm\alpha) = (-1)^m f\alpha; \\ F(m\omega+n\varpi i\pm\alpha) = (-1)^n F\alpha. \end{cases}$$

Si possono sottolineare come casi particolari

[22']
$$\begin{cases} \varphi(m\omega\pm\alpha) = \pm(-1)^m\varphi\alpha; \quad \varphi(n\varpi i\pm\alpha) = \pm(-1)^n\varphi\alpha; \\ f(m\omega\pm\alpha) = (-1)^m f\alpha; \quad f(n\varpi i\pm\alpha) = f\alpha; \\ F(m\omega\pm\alpha) = F\alpha; \quad F(n\varpi i\pm\alpha) = (-1)^n F\alpha. \end{cases}$$

[15] Il risultato emerge in maniera elegante e naturale dall'inversione dell'interale. Si vede pure che le funzioni sono in realtà doppiamente periodiche e che il rapporto tra i due periodi è un numero complesso.

5.

Le formule che sono state stabilite fanno vedere che si possono ottenere i valori delle funzioni $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ per tutti i valori reali o immaginari[16] della variabile se le si conoscono per i valori reali delle variabili compresi tra $\frac{\omega}{2}$ e $-\frac{\omega}{2}$ per i valori immaginari aventi la forma βi ove β è compreso tra $\frac{\varpi}{2}$ e $-\frac{\varpi}{2}$.

In effetti , supponiamo di richiedere il valore delle funzioni $\varphi(\alpha+\beta i)$, $f(\alpha+\beta i)$, $F(\alpha+\beta i)$ dove α e β sono quantità reali qualsiasi. Ponendo nelle formule [10] βi in luogo di β è chiaro che si otterranno le tre dette funzioni espresse mediante $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, $\varphi(\beta i)$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$. Non resta che determinare queste ultime. Ora, quali che siano i valori di α e β si possono sempre trovare due numeri interi m e n tali che $\alpha = m\omega \pm \alpha'$, $\beta = n\varpi \pm \beta'$, dove α' è una quantità compresa tra 0 e $+\frac{\omega}{2}$ e β' tra 0 e $+\frac{\varpi}{2}$[17]. Si avrà dunque, in virtù delle equazioni [22'] e sostituendo i valori precedenti di α e β

$$\varphi\alpha = \varphi(m\omega \pm \alpha') = \pm(-1)^m\varphi\alpha',$$

$$f\alpha = f(m\omega \pm \alpha') = (-1)^n f\alpha',$$

$$F\alpha = F(m\omega \pm \alpha') = F\alpha',$$

$$\varphi(\beta i) = \varphi(n\varpi i \pm \beta' i) = \pm(-1)^n\varphi(\beta' i),$$

$$f(\beta i) = f(n\varpi i \pm \beta' i) = f(\beta' i),$$

$$F(\beta i) = F(n\varpi i \pm \beta' i) = (-1)^n F(\beta' i).$$

Dunque le funzioni $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, $\varphi(\beta i)$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$ saranno espresse come appena detto e a seguire le funzioni $\varphi(\alpha+\beta i)$, $f(\alpha+\beta i)$, $F(\alpha+\beta i)$[18].

Abbiamo visto in precedenza che $\varphi\alpha$ è reale da $\alpha = -\frac{\omega}{2}$ fino a $\alpha = +\frac{\omega}{2}$ e che $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ è reale da $\alpha = -\frac{\varpi}{2}$ fino a $\alpha = +\frac{\varpi}{2}$. Dunque in virtù delle equazioni [22] è chiaro

1) che $\varphi\alpha$ e $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ sono reali per tutti i valori reali di α; $\varphi\alpha$ è compresa tra $-\frac{1}{c}$ e $+\frac{1}{c}$, mentre $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ tra $-\frac{1}{e}$ e $+\frac{1}{e}$;

[16] Si intende immaginari puri.
[17] Ci si è riportati all'intervallo fondamentale del periodo.
[18] Grazie ai teoremi di addizione [10].

2) che $\varphi\alpha$ si annulla per $\alpha = m\omega$ e $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ per $\alpha = m\varpi$ essendo m un numero intero, positivo o negativo; ma che $\varphi\alpha$ non è nulla per alcun altro valore reale di α.

Nel sottolineare che $f\alpha = \sqrt{1 - c^2\varphi^2\alpha}$, $F\alpha = \sqrt{1 + e^2\varphi^2\alpha}$ segue che possiamo dire

1) che le funzioni mediante $f\alpha$, $F\alpha$, $f(\alpha i)$, $F(\alpha i)$ sono reali per tutti i valori di α;

2) che $f\alpha$ è compresa tra i limiti -1 e $+1$ e $F\alpha$ tra i limiti +1 e $+\sqrt{1 + \frac{e^2}{c^2}}$ di modo che $F\alpha$ è positiva per tutti i valori reali di α;

3) che $f(\alpha i)$ è positiva e compresa tra i limiti +1 e $+\sqrt{1 + \frac{e^2}{c^2}}$ e $F(\alpha i)$ è positiva per tutti i valori reali di α;

4) che $f\alpha$ si annulla per $\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right)\omega$ e di modo che $F(\alpha i)$ per $\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right)\varpi$; ma che tali funzioni non si annullano per alcun altro valore di α;

Si sottolinea che, come corollari delle formule [22]:

1) Sia $\alpha = 0$. In tal caso ricordando che $\varphi(0) = 0$, $f(0) = 1$, $F(0) = 1$, si avrà

[23]
$$\begin{cases} \varphi(m\omega + n\varpi i) = 0 \\ f(m\omega + n\varpi i) = (-1)^m \\ F(m\omega + n\varpi i) = (-1)^n \end{cases}$$

2) Sia $\alpha = \frac{\omega}{2}$. In virtù delle equazioni:

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{c}, \quad f\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0, \quad F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{e^2+c^2}}{c} = \frac{b}{c},$$

si avrà

[24]
$$\begin{cases} \varphi\left[(m + \frac{1}{2})\omega + n\varpi i\right] = (-1)^{m+n}\frac{1}{c} \\ f\left[(m + \frac{1}{2})\omega + n\varpi i\right] = 0 \\ F\left[(m + \frac{1}{2})\omega + n\varpi i\right] = (-1)^n\frac{b}{c} \end{cases}$$

3) Sia $\alpha = \frac{\varpi}{2}i$. In virtù delle equazioni:

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{i}{e}, \quad f\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{b}{e}, \quad F\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = 0,$$

si avrà

$$
[25] \qquad \begin{cases} \varphi\left[m\omega + (n+\frac{1}{2})\overline{\omega}i\right] = (-1)^{m+n}\frac{1}{e} \\ f\left[m\omega + (n+\frac{1}{2})\overline{\omega}i\right] = (-1)^{m}\frac{b}{c} \\ F\left[m\omega + (n+\frac{1}{2})\overline{\omega}i\right] = 0 \end{cases}
$$

4) Sia $\alpha = \frac{\omega}{2} + \frac{\overline{\omega}}{2}i$. In virtù delle suddette equazioni si avrà:

$$
[26] \qquad \begin{cases} \varphi\left[(m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\overline{\omega}i\right] = \frac{1}{0} \\ f\left[(m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\overline{\omega}i\right] = \frac{1}{0} \\ F\left[(m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\overline{\omega}i\right] = \frac{1}{0} \end{cases}
$$ [19]

6.

Le equazioni [23], [24], [25] fanno vedere che la funzione $\varphi\alpha$ si annulla tutte le volte che α è della forma $\alpha = m\omega + n\overline{\omega}i$; che $f\alpha$ si annulla tutte le volte che α è della forma $(m+\frac{1}{2})\omega + n\overline{\omega}i$, e che $F\alpha$ si annulla tutte le volte che α è della forma $m\omega + (n+\frac{1}{2})\overline{\omega}i$. Ora io affermo che per tutti gli altri valori di α, le funzioni $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ assumeranno necessariamente un valore diverso da zero. Supponiamo in effetti che si abbia

$$\varphi(\alpha + \beta i) = 0,$$

essendo α e β delle quantità reali. In virtù della prima delle formule [10] questa equazione può essere scritta come segue:

$$\frac{\varphi\alpha . f(\beta i) . F(\beta i) + \varphi(\beta i) . f\alpha . F\alpha}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta} = 0.$$

Dal momento che le quantità $\varphi\alpha$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$ sono reali e $\varphi(\beta i)$ ha la forma iA dove A è reale allora questa equazione non può essere soddisfatta a meno che non sia separatamente

$$\varphi\alpha . f(\beta i) . F(\beta i) = 0; \quad \varphi(\beta i) . f\alpha . F\alpha = 0 .$$

Queste equazioni non possono essere soddisfatte che in due modi, ovvero ponendo

$$\varphi\alpha = 0; \quad \varphi(\beta i) = 0,$$

[19] Le relazioni dalla [23] alla [26] esprimono la proprietà fondamentale delle funzioni ellittiche date dall'inversione dell'integrale [2] ossia che, nel parallelogramma fondamentale, la funzione $\varphi\alpha$ ha due zeri e due poli semplici. Il fatto che non vi siano altri zeri è dimostrato nel paragrafo 6; che non vi siano altri poli è dimostrato nel paragrafo 7.

oppure

$$f(\beta i).F(\beta i) = 0; \quad f\alpha.F\alpha{=}0\ .$$

Le prime due equazioni danno $\alpha = m\omega$; $\beta = n\varpi$. Le ultime due, ricordando che $F\alpha$ e $f(\beta i)$ non possono mai essere nulle, danno

$$f\alpha = 0, \quad F(\beta i) = 0,$$

donde

$$\alpha = (m + \tfrac{1}{2})\omega, \quad \beta = (n + \tfrac{1}{2})\varpi.$$

Ma in corrispondenza di questi valori di α e β, il valore di $\varphi(\alpha + \beta i)$ diventa infinito; dunque gli unici valori di α e β sono $\alpha = m\omega$; $\beta = n\varpi$, e di conseguenza tutte le radici dell'equazione

$$\varphi x = 0,$$

possono essere rappresentate da

[27] $$x = m\omega + n\varpi i.$$

Allo stesso modo si trova che tutte le radici dell'equazione

$$fx = 0,$$

possono essere rappresentate da

[28] $$x = (m + \tfrac{1}{2})\omega + n\varpi i,$$

e quelle dell'equazione

$$Fx = 0,$$

da

[29] $$x = m\omega + (n + \tfrac{1}{2})\varpi i\ .$$

7.

Le formule [26] fanno vedere che vengono soddisfatte le tre equazioni

$$\varphi x = \tfrac{1}{0}, fx = \tfrac{1}{0}, Fx = \tfrac{1}{0},$$

se si dà a x uno dei valori della forma

[30] $$x = (m+\tfrac{1}{2})\omega + (n+\tfrac{1}{2})\varpi i\ .$$

Ora si può dimostrare che le equazioni in questione non hanno altre radici.

In effetti, essendo

$$\varphi x = -\frac{i}{ec}\frac{1}{\varphi\left(x-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)},\quad fx = \frac{b}{e}\frac{1}{f\left(x-\frac{\varpi}{2}i\right)},\quad fx = \frac{b}{c}\frac{1}{F\left(x-\frac{\omega}{2}\right)},$$

le equazioni in questione si tradurranno in:

$$\varphi\left(x-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)=0,\quad f\left(x-\frac{\varpi}{2}i\right)=0,\quad F\left(x-\frac{\omega}{2}\right);$$

ma in virtù di quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente, queste equazioni danno rispettivamente

$$x-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i = m\omega + n\varpi i;\quad x-\frac{\varpi}{2}i = \left(m+\frac{1}{2}\right)\omega + n\varpi i,\quad x-\frac{\omega}{2} = m\omega + \left(n+\frac{1}{2}\right)\overline{\omega\iota};$$

queste tre equazioni sono equivalenti alla seguente:

$$x = \left(m+\frac{1}{2}\right)\omega + \left(n+\frac{1}{2}\right)\overline{\omega\iota}\ ,$$

come si doveva dimostrare.

8.

Dopo aver trovato come visto tutte le radici delle equazioni

$$\varphi x = 0, fx = 0, Fx = 0,$$

$$\varphi x = \frac{1}{0}, fx = \frac{1}{0}, Fx = \frac{1}{0},$$

vado a ricercare le radici delle equazioni più generali

$$\varphi x = \varphi a, fx = fa, Fx = Fa,$$

ove a è una quantità qualunque, reale o immaginaria. Consideriamo innanzitutto l'equazione

$$\varphi x - \varphi a = 0$$

Ponendo nella seconda delle formule [12]

$$\alpha = \frac{x+a}{2},\quad \beta = \frac{x-a}{2},$$

si troverà

$$\varphi x - \varphi a = \frac{2\varphi\left(\frac{x-a}{2}\right) f\left(\frac{x+a}{2}\right) F\left(\frac{x+a}{2}\right)}{1+e^2c^2\varphi^2\left(\frac{x+a}{2}\right).\varphi^2\left(\frac{x-a}{2}\right)} = 0.$$

Questa equazione non può essere soddisfatta che in uno dei cinque casi seguenti:

1) se $\varphi\left(\frac{x-a}{2}\right) = 0,$ ovvero $x = a + 2m\omega + 2n\varpi i,$
2) se $f\left(\frac{x+a}{2}\right) = 0,$ ovvero $x = -a + (2m+1)\omega + 2n\varpi i,$
3) se $F\left(\frac{x+a}{2}\right) = 0,$ ovvero $x = -a + 2m\omega + (2n+1)\varpi i,$
4) se $\varphi\left(\frac{x-a}{2}\right) = \frac{1}{0},$ ovvero $x = a + (2m+1)\omega + (2n+1)\varpi i,$
5) se $\varphi\left(\frac{x+a}{2}\right) = \frac{1}{0},$ ovvero $x = -a + (2m+1)\omega + (2n+1)\varpi i.$

La soluzione di queste cinque equazioni è contenuta nelle formule [27], [28], [29], [30].

Tra i valori trovati per x vanno scartati quelli forniti dalla formula

$$x = -a + (2m+1)\omega + (2n+1)\varpi i\ ,$$

poiché un tale valore di per x dà, in virtù dell'equazione [22],

$$\varphi x = -\varphi a$$

mentre si deve avere $\varphi x = \varphi a$; ma gli altri valori di x, espressi dalle prime quattro formule, sono ammessi. Essi sono, come si vede,

[31] $$x = (-1)^{m+n} a + m\omega + n\varpi i.$$

Questa è dunque l'espressione generale di tutte le radici dell'equazione

$$\varphi x = \varphi a\ .$$ [20]

Alla stessa maniera si trova che tutte le radici dell'equazione

$$fx = fa$$

sono rappresentate dalla formula

[32] $$x = \pm a + 2m\omega + n\varpi i\ ,$$

e tutte quelle dell'equazione

$$Fx = Fa$$

dalla formula

[20] In questo paragrafo viene dimostrato che le funzioni in questione assumono tutti i valori una ed una sola volta all'interno del parallelogramma fondamentale. Quindi il sistema di funzioni ellittiche studiato è completamente definito.

[33] $$x = \pm a + m\omega + 2n\varpi i\ .$$

§II.

Formule che esprimono i valori di funzioni $\varphi(n\alpha)$, $f(n\alpha)$, $F(n\alpha)$ mediante funzioni razionali di $\varphi\alpha, f\alpha, F\alpha$.

9.

Riprendiamo le formule [12]. Facendo nella 1°, la 3° e la 5° $\alpha = n\beta$, verrà

[34] $$\begin{cases} \varphi(n+1)\beta = -\varphi(n-1)\beta + \frac{2\varphi(n\beta) f\beta . F\beta}{R}; \\ f(n+1)\beta = -f(n-1)\beta + \frac{2f(n\beta) . f\beta}{R}; \\ F(n+1)\beta = -F(n-1)\beta + \frac{2F(n\beta) . F\beta}{R}. \end{cases}$$

dove $R = 1 + e^2c^2\varphi^2(n\beta) . \varphi^2\beta$.

Queste formule danno il valore di $\varphi(n+1)\beta$ in funzione di $\varphi(n-1)\beta$ e $\varphi(n\beta)$; quello di $f(n+1)\beta$ in funzione di $f(n-1)\beta$ e $f(n\beta)$ e quello di $F(n+1)\beta$ in funzione di $F(n-1)\beta$ e $F(n\beta)$.[21] Dunque ponendo in successione *n*=1, 2, 3, …si troveranno in sequenza i valori delle funzioni:

$$\varphi(2\beta),\ \ \varphi(3\beta),\ \ \varphi(4\beta)\ldots\varphi(n\beta),$$

$$f(2\beta),\ f(3\beta),\ \ f(4\beta)\ldots f(n\beta),$$

$$F(2\beta),\ \ F(3\beta),\ F(4\beta)\ldots F(n\beta),$$

espresse come funzioni razionali delle tre quantità

$$\varphi\beta, f\beta, F\beta.$$

Ponendo per esempio *n*=1, avremo

[35] $$\begin{cases} \varphi(2\beta) = \frac{2\varphi\beta . f\beta . F\beta}{1+e^2c^2\varphi^4\beta}; \\ f(2\beta) = -1 + \frac{2f^2\beta}{1+e^2c^2\varphi^4\beta}; \\ F(2\beta) = -1 + \frac{2F^2\beta}{1+e^2c^2\varphi^4\beta}. \end{cases}$$

[21] Si tratta di relazioni di ricorrenza a tre termini.

Poiché le funzioni $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ sono funzioni razionali di $\varphi\beta$, $f\beta$, $F\beta$, si possono sempre ricondurre alla forma $\frac{P}{Q}$, dove P e Q sono delle funzioni intere di $\varphi\beta$, $f\beta$, $F\beta$. È parimenti chiaro che il denominatore Q avrà lo stesso valore per le tre funzioni che si considerano[22].

Sia dunque

[35'] $$\varphi(n\beta)=\frac{P_n}{Q_n},\quad f(n\beta)=\frac{P'_n}{Q_n},\quad F(n\beta)=\frac{P''_n}{Q_n},$$

si avrà ugualmente

$$\varphi(n+1)\beta=\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}},\quad f(n+1)\beta=\frac{P'_{n+1}}{Q_{n+1}},\quad F(n+1)\beta=\frac{P''_{n+1}}{Q_{n+1}},$$

$$\varphi(n-1)\beta=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\quad f(n-1)\beta=\frac{P'_{n-1}}{Q_{n-1}},\quad F(n-1)\beta=\frac{P''_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

Sostituendo questi valori, la prima delle [34] diventa

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}++\frac{2f\beta.F\beta\frac{P_n}{Q_n}}{1+e^2c^2\varphi^2\beta\frac{P^2{}_n}{Q^2{}_n}}$$

ovvero

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=-\frac{P_{n-1}\left(Q^2{}_n+e^2c^2\varphi^2\beta P^2{}_n\right)+2P_nPQ_nQ_{n-1}f\beta.F\beta}{Q_{n-1}\left(Q^2{}_n+e^2c^2\varphi^2\beta P^2{}_n\right)}$$

Uguagliando i numeratori e i denominatori di queste due frazioni si avrà

[36] $$P_{n+1}=-P_{n-1}\left(Q^2{}_n+e^2c^2\varphi^2\beta P^2{}_n\right)+2f\beta.F\beta P_nQ_nQ_{n-1}$$

[37] $$Q_{n+1}=Q_{n-1}\left(Q^2{}_n+e^2c^2\varphi^2\beta P^2{}_n\right).$$

La seconda e la terza delle equazioni [34] daranno, allo stesso modo,

[38] $$P'_{n+1}=-P'_{n-1}\left(Q^2{}_n+e^2c^2\varphi^2\beta P^2{}_n\right)+2f\beta.F\beta P_n'PQ_nQ_{n-1}$$

[39] $$P''_{n+1}=-P''_{n-1}\left(Q^2{}_n+e^2c^2\varphi^2\beta P^2{}_n\right)+2f\beta.F\beta P_n''PQ_nQ_{n-1}.$$

Ponendo in queste quattro formule n=1, 2, 3 . . . e tenendo presente che si ha

$$Q_0=1,\quad Q_1=1,\quad P_0=0,\quad P_1=\varphi\beta,$$

$$P'_0=1,\quad P'_1=f\beta,\quad P''_0=0,\quad P_1=\varphi\beta,$$

---

[22] Ad esempio $Q_3=1+2e^2c^2\varphi^4\beta+e^4c^4\varphi^8\beta+4e^2c^2f^2\beta.F^2\beta.\varphi^4\beta$.

si troveranno in successione le funzioni intere Q_n, P_n, P'_n, $P"_n$ per tutti i valori di n.

Siano per brevità:

[40] $$\varphi\beta = x, \quad f\beta = y, \quad , \quad F\beta = z,$$

[41] $$R_n = Q^2{}_n + e^2c^2x^2P^2{}_n \,,$$

le precedenti formule daranno

[42] $$\begin{cases} Q_{n+1} = Q_{n-1}R_n \\ P_{n+1} = -P_{n-1}R_n + 2yzP_nQ_nQ_{n-1} \\ P'_{n+1} = -P'_{n-1}R_n + 2yP'_nQ_nQ_{n-1} \\ P"_{n+1} = -P"_{n-1}R_n + 2zP"_nQ_nQ_{n-1} \end{cases}$$

Ponendo n=1, 2 si avrà

[43] $$\begin{cases} R_1 = Q^2{}_1 + e^2c^2x^2P^2{}_1 = 1 + e^2c^2x^4 \\ Q_2 = Q_0R_1 = 1 + e^2c^2x^4 \\ P_2 = -P_0R_1 + 2yzP_1Q_1Q_0 = 2xyz \\ P'_2 = -P'_0R_1 + 2yP'_1Q_1Q_0 = -1 - e^2c^2x^4 + 2y^2 \\ P"_2 = -P"_0R_1 + 2zP"_1Q_1Q_0 = -1 - e^2c^2x^4 + 2z^2 \end{cases}$$

[44] $$\begin{cases} R_2 = Q^2{}_2 + e^2c^2x^2P^2{}_2 = (1 + e^2c^2x^4)^2 + e^2c^2x^2.4x^2y^2z^2 \\ Q_3 = Q_1R_2 = R_2 \\ P_3 = -P_1R_2 + 2yzP_2Q_2Q_1 = -xR_2 + 4y^2z^2xQ_2 = x(4y^2z^2Q_2 - R_2) \\ P'_3 = -P'_1R_2 + 2yP'_2Q_2Q_1 = -yR_2 + 2yP'_2Q_2 = y(2P'_2Q_2 - R_2) \\ P"_3 = z(2Q_2P"_2 - R_2) \end{cases}$$

Continuando in tal guisa e ricordando che $y^2 = 1 - c^2x^2$ e $z^2 = 1 + e^2x^2$ si vede agevolmente che le quantità

$$Q_n, \ \frac{P_{2n}}{xyz}, \ \frac{P_{2n+1}}{x}, \ P'_{2n}, \ \frac{P'_{2n+1}}{y}, \ P"_{2n}, \ \frac{P"_{2n+1}}{z}$$

sono funzioni intere delle tre quantità x^2, y^2, z^2 e quindi di una qualsiasi di queste quantità, quale che sia il valore intero di n.[23]

Ciò fa vedere che le espressioni di $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ sono della seguente forma

---

[23] Tutte le espressioni si possono semplificare ancora ricordando che $yz = x' = \frac{dx}{d\alpha}$.
Ad esempio $P_2 = 2xyz = 2xx' = (x^2)'$.

$$
[45] \qquad \begin{cases} \varphi(2n\beta) = \varphi\beta.f\beta.T, & \varphi(2n+1)\beta = \varphi\beta.T' \\ f(2n\beta) = T_1, & f(2n+1)\beta = f\beta.T'' \\ F(2n\beta) = T_2, & F(2n+1)\beta = F\beta.T''' \end{cases}
$$

dove le T ecc. rappresentano funzioni razionali delle quantità $(\varphi\beta)^2$, $(f\beta)^2$, $(F\beta)^2$.

§III.

Soluzione delle equazioni $\varphi(n\beta) = \frac{P_n}{Q_n}, f(n\beta) = \frac{P'_n}{Q'_n}, F(n\beta) = \frac{P''_n}{Q''_n}$

10.

In seguito a ciò che abbiamo visto, le funzioni $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ si esprimono razionalmente in funzione di x, y, z. Il viceversa non ha luogo, dal momento che le equazioni [35'] sono in genere di grado molto elevato. Esse hanno pertanto un certo numero di radici. Vediamo ora come si possono esprimere agevolmente tali radici mediante le funzioni φ, f, F.

A. Consideriamo innanzitutto l'equazione $\varphi(n\beta) = \frac{P_n}{Q_n}$, ovvero $Q_n \cdot \varphi(n\beta) = P_n$, e cerchiamo tutti i valori di x. Occorre distinguere due casi a seconda che n sia pari o dispari:

1) *Se n è un numero pari.*

A seguito di quanto visto nel paragrafo precedente [45] si avrà in questo caso

$$\varphi(2n\beta) = xyz.\psi(x^2),$$

ossia, in virtù delle formule

$$y = \sqrt{1 - c^2x^2}, \quad z = \sqrt{1 + e^2x^2}:$$

$$\varphi(2n\beta) = x.\psi(x^2)\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)}.$$

Dunque l'equazione in x diverrà

$$\varphi^2(2n\beta) = x^2.(\psi x^2)^2(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2).$$

Indicando il secondo membro con $\theta(x^2)$, s avrà

$$\varphi^2(2n\beta) = \theta(x^2) .$$

Se $\varphi\beta$ è uno dei valori di x, si avrà

$$[46] \qquad \varphi^2(2n\beta) = \theta(\varphi^2\beta),$$

equazione che sussiste quale che sia il valore di β. Gli alti valori di x si trovano come segue. Sia $x = \varphi\alpha$ una radice qualsiasi, si deve avere

$$\varphi^2(2n\beta) = \theta(\varphi^2\alpha),$$

Ora, inserendo nella [46] α al posto di β, verrà

$$\varphi^2(2n\alpha) = \theta(\varphi^2\alpha),$$

dunque

[47] $$\varphi^2(2n\beta) = \varphi^2(2n\alpha),$$

equazione che si riconduce a queste due:

$$\varphi(2n\alpha) = \varphi(2n\beta) \quad \text{e} \quad \varphi(2n\alpha) = -\varphi(2n\beta),$$

La prima fornisce, in virtù di [31]

$$2n\alpha = (-1)^{m+\mu}2n\beta + m\omega + \mu\bar{\omega}i$$

dove m e μ sono due numeri interi qualsiasi, positivi o negativi, zero compreso.

La seconda fornisce gli stessi valori di $2n\alpha$ ma con segno contrario, cone si vede agevolmente se si riscrive come segue:

$$\varphi(-2n\alpha) = \varphi(2n\beta)$$

dove m e μ sono due numeri interi qualsiasi, positivi o negativi, zero compreso.

Tutti i valori di $2n\alpha$ che soddisfano l'equazione [47] possono essere dunque espressi con

$$2n\alpha = \pm[(-1)^{m+\mu}2n\beta + m\omega + \mu\bar{\omega}i]$$

Da qui si ottiene il valore di α dividendo per $2n$, ovvero

$$\alpha = \pm\left[(-1)^{m+\mu}\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\bar{\omega}i\right].$$

Conoscendo il valore di α, si avrà

[48] $$\varphi\alpha = \pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\bar{\omega}i\right) = x.$$

Quindi tutti i valori di x sono contenuti in questa espressione, e li si troveranno dando ai numeri m e μ tutti i valori interi da $-\infty$ fino a $+\infty$. Ma per ottenere tutti quelli effettivamente differenti tra loro, basta attribuire a m e μ i valori interi minori di $2n$. In realtà , quali che siano questi numeri, si possono sempre pensare riportati a questa forma:

$$m = 2nk + m', \quad \mu = 2nk' + \mu',$$

dove k, k' sono numeri interi e m', μ' sono numeri interi minori di $2n$. Sostituendo questi valori nell'espressione di x, essa diverrà

$$x=\pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}\beta+\frac{m'}{2n}\omega+\frac{\mu'}{2n}\varpi i+k\omega+k'\omega i\right);$$

ora, in virtù della [22] questa espressione si riduce a

[49] $$x=\pm\varphi\left((-1)^{m'+\mu'}\beta+\frac{m'}{2n}\omega+\frac{\mu'}{2n}\varpi i\right).$$

Questo valore di x è della medesima forma del precedente [48], solo che m e μ sono sostituiti da m' e μ' entrambi i quali sono positivi e minori di $2n$; dunque si otterranno tutti i valori diversi di x dando a m e μ solamente tutti i valori interi da zero a $2n$. Tutti tali valori sono necessariamente differenti tra loro. In effetti, supponiamo per esempio che sia

$$\pm\varphi\left((-1)^{m'+\mu'}\beta+\frac{m'}{2n}\omega+\frac{\mu'}{2n}\varpi i\right)=\pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}\beta+\frac{m}{2n}\omega+\frac{\mu}{2n}\varpi i\right),$$

seguirà, per [31],

$$(-1)^{m'+\mu'}\beta+\frac{m'}{2n}\omega+\frac{\mu'}{2n}\varpi i=\pm\left((-1)^{m+\mu}\beta+\frac{m}{2n}\omega+\frac{\mu}{2n}\varpi i\right)+k\omega+k'\omega i,$$

essendo k e k' degli interi. Questa equazione dà

$$\mu'=k'.2n\pm\mu,\quad m'=k.2n\pm m,\qquad (-1)^{m'+\mu'}=(-1)^{m+\mu}.$$

Le prime due equazioni non possono essere soddisfatte a meno che non sia $k'=1$, $k=1$, $\mu'=2n-\mu$, $m'=2n-m$, e allora l'ultima diventerà

$$(-1)^{4n-m-\mu}=-(-1)^{m+\mu},$$

donde

$$(-1)^{2n+2\mu}=-1$$

risultato assurdo. Quindi tutti i valori di x, contenuti nella formula [48] sono differenti tra loro se m e μ sono positivi e minori di $2n$.

Il numero totale di valori di x è, com'è facile vedere, uguale a $2(2n)^2=8n^2$; ovvero l'equazione $\varphi^2(2n\beta)=\theta(x^2)$ non può avere radici uguali, poiché in tal caso si avrebbe $\frac{d\theta(x^2)}{dx}=0$, che darebbe a x un valore indipendente da β. Dunque il grado dell'equazione $\varphi^2(2n\beta)=\theta(x^2)$ è uguale al numero delle radici cioè $8n^2$. Se per esempio n=1, si avrà l'equazione

$$\varphi^2(2\beta)=\theta(x^2)=\frac{4x^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}{(1+e^2c^2x^4)^2}\ ,$$

ebbene

$$(1+e^2c^2x^4)^2\varphi^2(2\beta)=4x^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2),$$

e, per la formula [48], le radici di questa equazione, in numero di otto, saranno:

$$x = \pm\varphi\beta,\quad x = \pm\varphi\left(-\beta + \frac{\omega}{2}\right),\quad x = \pm\varphi\left(-\beta + \frac{\varpi}{2}i\right),\quad x = \pm\varphi\left(-\beta + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right).$$

2) *Se n è un numero dispari.*

In questo caso $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ è, come abbiamo visto, una funzione razionale di x e di conseguenza l'equazione in x sarà

[50] $$\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

Si troverà, precisamente come nel caso precedente, che tutte le radici di questa equazione possono essere rappresentate da

[51] $$x = \varphi\left((-1)^{m+\mu}\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

ove occorre assegnare a se m e μ tutti i valori interi da $-n$ a n inclusi. Dunque il numero di radici differenti è $(2n+1)^2$. Questo è quindi il grado dell'equazione in questione[24]. Si possono esprimere le radici anche mediante

$$x = (-1)^{m+\mu}.\,\varphi\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right).$$

Se per esempio n=1, si otterrà un'equazione di grado 3^2=9. La formula [51] fornisce per x i seguenti 9 valori:

$$\varphi\beta;$$

$$\varphi\left(-\beta - \frac{\omega}{3}\right),\quad \varphi\left(-\beta + \frac{\omega}{3}\right),$$

$$\varphi\left(-\beta - \frac{\varpi}{3}i\right),\quad \varphi\left(-\beta + \frac{\varpi}{3}i\right),$$

$$\varphi\left(\beta - \frac{\omega}{3} - \frac{\varpi}{3}i\right),\quad \varphi\left(\beta - \frac{\omega}{3} + \frac{\varpi}{3}i\right),$$

$$\varphi\left(\beta + \frac{\omega}{3} - \frac{\varpi}{3}i\right),\quad \varphi\left(\beta + \frac{\omega}{3} + \frac{\varpi}{3}i\right).$$

B. Consideriamo ora l'equazione

[52] $$f(n\beta) = \frac{P'_n}{Q_n},$$

[24] In genere si deduce che data un'equazione di grado p vi sono p radici, qui l'Autore fa l'opposto.

e ricerchiamo i valori di y che soddisfano a questa equazione. Essendo la funzione $\frac{P'_n}{Q_n}$ razionale in y, come abbiamo visto innanzi, l'equazione in y, ponendo $\frac{P'_n}{Q_n} = \psi y$, sarà

$$f(n\beta) = \psi y.$$

Una delle radici di questa equazione è $y = f\beta$, dunque, quale che sia il valore di β,

[53] $$f(n\beta) = \psi(f\beta).$$

Per trovare gli altri valori di y, indichiamo con α una nuova incognita tale che $y = f\alpha$; si avrà

$$f(n\beta) = \psi(f\alpha);$$

ora, in virtù della [53], il secondo membro è uguale a $f(n\alpha)$; quindi per determinare α si avrà l'equazione

$$f(n\alpha) = f(n\beta).$$

E in virtù della formula [32] tale equazione fornisce una espressione generale per $n\alpha$:

$$n\alpha = \pm n\beta + 2m\omega + \mu\varpi i,$$

m e μ essendo due numeri interi positivi o negativi, zero compreso. Da lì si deduce

$$\alpha = \pm\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i$$

e di conseguenza:

$$f\alpha = f\left(\pm\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right) = y.$$

Questo è il valore generale di y.

Ora per ottenere i valori differenti di y, io dico che è sufficiente prendere β con il segno $+$ ed assegnare a m e μ tutti i valori interi minori di n. In effetti, dal momento che si ha $f(+\alpha) = f(-\alpha)$ si avrà innanzitutto

$$f\left(-\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right) = f\left(\beta - \frac{2m}{n}\omega - \frac{\mu}{n}\varpi i\right).$$

Si può dunque sempre prendere β con il segno + nell'espressione per y. Inoltre tutti i valori di y sono contenuti nell'espressione

[54] $$y = f\left(\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right).$$

Ancora, quali che siano i numeri m e μ si può sempre supporre

$$m = k.n + m', \quad \mu = k'.n + \mu',$$

dove k, k', m', μ' sono numeri interi, gli ultimi due essendo allo stesso tempo positivi e minori di n.

Sostituendo verrà

$$y = f\left(\beta + \frac{2m'}{n}\omega + \frac{\mu'}{n}\varpi i + 2k\omega + k'\varpi i\right).$$

Ora in virtù della formula [22], il secondo membro di tale equazione è uguale a

[55] $$f\left(\beta + \frac{2m\prime}{n}\omega + \frac{\mu\prime}{n}\varpi i\right) = y,$$

quantità della stessa forma del secondo membro della [54], a patto che m', μ' sono positivi e minori di n. Quindi ecc.[25]

Attribuendo a m e μ tutti i valori possibili minori di n si troveranno n^2 valori per y. Ora, in generale tutte queste quantità sono differenti tra loro. In effetti, supponiamo per esempio

$$f\left(\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right) = f\left(\beta + \frac{2m'}{n}\omega + \frac{\mu'}{n}\varpi i\right)$$

si avrà, in virtù della formula [32] ed indicando con k, k' due numeri interi,

$$\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i = \pm\left(\beta + \frac{2m'}{n}\omega + \frac{\mu'}{n}\varpi i\right) + 2k\omega + k'\varpi i.$$

Dal momento che β può avere un qualunque valore, è chiaro che questa equazione non può essere soddisfatta a meno che si consideri al secondo membro il segno superiore. Segue allora

$$\frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i = \frac{2m'}{n}\omega + \frac{\mu'}{n}\varpi i + 2k\omega + k'\varpi i,$$

donde si ottiene, uguagliando le parti reali e le parti immaginarie

$$m = m' + kn, \quad \mu = \mu' + k'n,$$

equazioni impossibili, ricordando che i numeri m, m', μ, μ' sono tutti positivi e minori di n. Dunque in generale l'equazione

$$f(n\beta) = \psi y$$

ha n^2 radici differenti tra loro e non di più. Ora in genere tutte le radici di questa equazione sono diverse tra loro. In effetti, se due di esse fossero uguali, si avrebbe allo stesso tempo

[25] Il metodo è il medesimo dell'equazione per φ.

$$f(n\beta) = \psi y \quad \text{e} \quad 0 = \psi' y,$$

e ciò è impossibile, visto che abbiamo sottolineato che i coefficienti di y in ψy non contengono β. Dunque in genere l'equazine [52] è necessariamente di grado n^2.

C. L'equazione

[56] $$F(n\beta) = \frac{P''_n}{Q_n},$$

poiché è trattata rispetto a z assolutamente alla medesima maniera in cui l'equazione $f(n\beta) = \frac{P'_n}{Q_n}$ lo è rispetto a y fornisce per l'espressione generale dei valori di z

[57] $$z = F\left(\beta + \frac{m}{n}\omega + \frac{2\mu}{n}\varpi i\right),$$

Dove m e μ sono interi, positivi e minori di n. Il numero di valori si z è n^2, ed essi sono in genere tutti differenti tra loro.

Dunque in genere l'equazione [56] è di grado n^2.

11.

Abbiamo trovato prima tutte le radici delle equazioni

$$\varphi(n\beta) = \frac{P_n}{Q_n}, f(n\beta) = \frac{P'_n}{Q'_n}, F(n\beta) = \frac{P''_n}{Q''_n},$$

radici che sono espresse dalle formule [48], [51], [54], [57]. Tutte queste radici sono differenti tra loro, eccetto che per dei valori particolari di β; ma per tali valori, le radici differenti sono contenute nelle medesime formule. – In quest'ultimo caso un certo numero di valori delle quantità x, y, z sono uguali; ma è chiaro che tutti questi valori uguali o non uguali restano comunque radici delle equazioni di cui abbiamo detto. Questo si vede facendo assumere a β un valore particolare che dà a x, y, z valori uguali.

Ponendo nella formula [48] $\beta = \frac{\alpha}{2n}$, si otterrà l'equazione

$$\varphi^2\alpha = \frac{P^2{}_{2n}}{Q^2{}_{2n}},$$

da cui le radici

[58] $$x = \pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}\frac{\alpha}{2n} + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right),$$

dove m e μ assumono tutti i valori interi e positivi minori di $2n$.

Ponendo similmente nella formula [50] $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, si otterrà l'equazione $\varphi\alpha = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, le cui radici sono

[59] $$x = (-1)^{m+\mu}\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

dove m e μ avranno tutti i valori interi da $-n$ a $+n$.

Ponendo infine nelle formule [52], [56] $\beta = \frac{\alpha}{n}$, si otterrà l'equazione $f\alpha = \frac{P'_n}{Q_n}$, ove le radici sono

[60] $$y = f\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right),$$

e l'equazione $F\alpha = \frac{P''_n}{Q_n}$, dove le radici sono

[61] $$z = F\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{m}{n}\omega + \frac{2\mu}{n}\varpi i\right),$$

dove m e μ sono ristretti tra i limiti 0 e n-1 inclusi. Se n è dispari e uguale a $2n$+1, si può inoltre supporre

$$y = (-1)^m f\left(\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

$$z = (-1)^\mu F\left(\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

m e μ avendo tutti i valori interi da $-n$ a $+n$.

In tutte queste equazioni la quantità α può assumere un valore qualsiasi.

Come casi particolari si devono sottolineare i seguenti:

1) Ponendo nelle [58] e [59] $\alpha = 0$, si avranno le equazioni

[62] $$\begin{cases} P^2{}_{2n} = 0, \ \text{le cui radici sono } x = \pm\varphi\left(\frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right) \\ \qquad \text{(i limiti di } m \text{ e } \mu \text{ essendo } 0 \text{ e } 2n-1), \\ P_{2n+1} = 0, \ \text{le cui radici sono } x = \varphi\left(\frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right) \\ \qquad \text{(i limiti di } m \text{ e } \mu \text{ essendo } -n \text{ e } n). \end{cases}$$

2) Ponendo nella [60] $\alpha = \frac{\omega}{2}$, e nella [61] $\alpha = \frac{\varpi}{2}i$, e ricordando che $f\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$, $F\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = 0$ si otterranno le due equazioni

[63] $P'_n = 0$, le cui radici sono $y = f\left(\left(2m + \frac{1}{2}\right)\frac{\omega}{n} + \frac{\mu}{n}\varpi i\right)$

[64] $P''_n = 0$, le cui radici sono $z = F\left(\frac{m}{n}\omega + \left(2\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{\varpi i}{n}\right)$

(i limiti di m e μ essendo 0 e n-1).

3) Ponendo nella [58] $\alpha = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i$, e ricordando che $\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}$, si avrà l'equazione

$$Q^2{}_{2n} = 0$$

le cui radici sono $x = \pm\varphi\left(\left[m + \frac{1}{2}(-1)^{m+\mu}\right]\frac{\omega}{2n} + \left[\mu + \frac{1}{2}(-1)^{m+\mu}\right]\frac{\varpi i}{2n}\right)$.

I valori di x devono essere uguali a due a due, e si vede agevolmente che i valori differenti possono essere espressi con

[65] $$x = \varphi\left(\left[m + \frac{1}{2}\right]\frac{\omega}{2n} + \left[\mu + \frac{1}{2}\right]\frac{\varpi i}{2n}\right),$$

assegnando a m e μ tutti i valori interi da 0 fino a $2n$-1.

Queste sono quindi le radici dell'equazione in x

$$Q_{2n} = 0\ .$$

Ponendo allo stesso modo nella [59] $\alpha = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i$, si avrà l'equazione

$$Q_{2n+1} = 0$$

le cui radici saranno

$$[66]\qquad \begin{cases} x = (-1)^{m+\mu}\varphi\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\omega}{2n+1}+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \\ y = (-1)^{m} f\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\omega}{2n+1}+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \\ z = (-1)^{\mu} F\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\omega}{2n+1}+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\frac{\varpi i}{2n+1}\right). \end{cases}$$

m e μ avendo come valore tutti i numeri interi da $-n$ a $+n$.

I valori di x devono essere uguali a due a due, e si vede agevolmente che i valori differenti possono essere espressi con

$$[65]\qquad x = \varphi\left(\left[m+\frac{1}{2}\right]\frac{\omega}{2n}+\left[\mu+\frac{1}{2}\right]\frac{\varpi i}{2n}\right),$$

assegnando a m e μ tutti i valori interi da 0 fino a $2n$-1.

Tra i valori di x, y, z occorre notare quelli corrispondenti a $m = n$ e $\mu = n$. Si ha allora

$$x = \varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0},$$

$$y = (-1)^n f\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0},$$

$$z = (-1)^n F\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}.$$

Questi valori infiniti mostrano che il grado dell'equazione $Q_{2n+1} = 0$ è inferiore di una unità rispetto a quello delle equazioni donde ha origine. Scartando tali valori, i restanti, in numero di $(2n+1)^2 - 1$ costituiscono le radici dell'equazione $Q_{2n+1} = 0$.

§IV.

Soluzione algebrica delle equazioni $\varphi\alpha = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, f\alpha = \frac{P'_{2n+1}}{Q'_{2n+1}}, F\alpha = \frac{P''_{2n+1}}{Q''_{2n+1}}$

12.

Abbiamo visto nel paragrafo precedente, come si possono esprimere agevolmente le radici dell'equazione in questione mediante le funzioni φ, f, F . Andiamo ora a dedurre la soluzione delle stesse equazioni, ossia la determinazione delle funzioni $\varphi\frac{\alpha}{n}, f\frac{\alpha}{n}, F\frac{\alpha}{n}$ in funzione di $\varphi\alpha, f\alpha, F\alpha$.

Dal momento che si ha

$$\varphi\frac{\alpha}{m\mu} = \varphi\left(\frac{1}{m}\frac{\alpha}{\mu}\right)$$

Si può supporre che n sia un numero primo. Consideriamo innanzitutto il caso in cui n=2, e successivamente quello in cui n è un numero dispari.

A. *Espressione delle funzioni* $\varphi\frac{\alpha}{2}, f\frac{\alpha}{2}, F\frac{\alpha}{2}$.

13.

I valori di $\varphi\frac{\alpha}{2}, f\frac{\alpha}{2}, F\frac{\alpha}{2}$ possono essere trovati molto facilmente nella seguente maniera. Supponendo nelle formule[26] [35] $\beta = \frac{\alpha}{2}$ e ponendo

$$x = \varphi\frac{\alpha}{2},\ y = f\frac{\alpha}{2}, z = F\frac{\alpha}{2}\ ,$$

verrà

$$f\alpha = \frac{y^2 - 2c^2x^2z^2}{1 + e^2c^2x^4},\quad F\alpha = \frac{z^2 + e^2y^2x^2}{1 + e^2c^2x^4},$$

orbene, utilizzando le espressioni di y^2 e z^2 secondo x^2,

$$f\alpha = \frac{1 - 2c^2x^2 - c^2e^2x^4}{1 + e^2c^2x^4},\quad F\alpha = \frac{1 + 2e^2x^2 - e^2c^2x^4}{1 + e^2c^2x^4}.$$

Queste equazioni forniscono

$$1 + f\alpha = \frac{2(1 - c^2x^2)}{1 + e^2c^2x^4},\quad 1 - f\alpha = \frac{2c^2x^2(1 + e^2x^2)}{1 + e^2c^2x^4},$$

$$F\alpha - 1 = \frac{2e^2x^2(1 - c^2x^2)}{1 + e^2c^2x^4},\quad F\alpha + 1 = \frac{2(1 - e^2x^2)}{1 + e^2c^2x^4},$$

donde

$$\frac{F\alpha - 1}{1 + f\alpha} = e^2x^2,\quad \frac{1 - f\alpha}{F\alpha + 1} = c^2x^2,$$

e di conseguenza, ricordando[27] che $y^2 = 1 - c^2x^2, z^2 = 1 + e^2x^2$,

$$z^2 = \frac{F\alpha + f\alpha}{1 + f\alpha},\quad y^2 = \frac{F\alpha + f\alpha}{1 + F\alpha}.$$

Da queste equazioni si deduce, estraendo la radice quadrata, e rimpiazzando x, y, z con i loro valori $\varphi\frac{\alpha}{2}, f\frac{\alpha}{2}, F\frac{\alpha}{2}$,

[26] Le formule di duplicazione. Si noti l'analogia dell'approccio alla stessa questione riguardante le funzioni circolari.

[27] Come non riconoscere che, se e=0 e c=1, le espressioni si leggono $\sin^2 t$ = 1-$\cos^2 t$, $z = 1$.

$$[67] \quad \begin{cases} \varphi\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{1-f\alpha}{1+F\alpha}}=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{F\alpha-1}{f\alpha+1}}, \\ f\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{F\alpha+f\alpha}{1+F\alpha}},\ F\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{F\alpha+f\alpha}{1+f\alpha}} \end{cases}$$

Queste sono le formule più semplici[28] che si possono dare alle funzioni $\varphi\frac{\alpha}{2}, f\frac{\alpha}{2}, F\frac{\alpha}{2}$. In questa maniera si possono esprimere algebricamente[29] $\varphi\frac{\alpha}{2}, f\frac{\alpha}{2}, F\frac{\alpha}{2}$ in funzione di $f\alpha$, $F\alpha$. Nella medesima maniera $\varphi\frac{\alpha}{4}, f\frac{\alpha}{4}, F\frac{\alpha}{4}$ si esprimono in funzione di $\varphi\frac{\alpha}{2}, f\frac{\alpha}{2}, F\frac{\alpha}{2}$. Dunque in generale le funzioni $\varphi\frac{\alpha}{2^n}, f\frac{\alpha}{2^n}, F\frac{\alpha}{2^n}$ possono essere espresse mediante estrazioni di radici quadrate[30] in funzione delle tre quantità $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

Per applicare le formule appena trovate per la *bisezione* a un esempio, supponiamo $\alpha=\frac{\omega}{2}$. Si avrà allora $f\frac{\omega}{2}=0$, $F\frac{\omega}{2}=\frac{\sqrt{e^2+c^2}}{c}$, dunque sostituendo,

$$\varphi\frac{\omega}{4}=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{c}\sqrt{e^2+c^2}}}=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{1}{e}\sqrt{e^2+c^2}-1},$$

$$f\frac{\omega}{4}=\sqrt{\frac{\frac{1}{e}\sqrt{e^2+c^2}}{1+\frac{1}{c}\sqrt{e^2+c^2}}},$$

$$F\frac{\omega}{4}=\sqrt{\frac{1}{e}\sqrt{e^2+c^2}},$$

ossia

$$\varphi\frac{\omega}{4}=\sqrt{\frac{1}{c^2+c\sqrt{e^2+c^2}}}=\frac{\sqrt{c\sqrt{e^2+c^2}-c^2}}{ec},$$

$$f\frac{\omega}{4}=\frac{\sqrt[4]{e^2+c^2}}{c^2+c\sqrt{e^2+c^2}}=\frac{1}{e}\sqrt{e^2+c^2-c\sqrt{e^2+c^2}},$$

[28] Lo sono in effetti, pur non essendo disaccoppiate. Se vogliamo agire in tal senso dobbiamo ricordare le espressioni per $f\alpha, F\alpha$ in funzione di $\varphi\alpha$. Scriveremo allora $\varphi\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-c^2\varphi^2\alpha}}{1+\sqrt{1+e^2\varphi^2\alpha}}}$, $f\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+e^2-e^2f^2\alpha}+cf\alpha}{c+\sqrt{c^2+e^2-e^2f^2\alpha}}}$ ed infine $F\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{eF\alpha+\sqrt{c^2+e^2-c^2F^2\alpha}}{e+\sqrt{c^2+e^2-c^2F^2\alpha}}}$. La prima, nelle ipotesi della nota precedente, si legge $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; la seconda invece corrisponde a $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

[29] Si tratta delle espressioni che precedono le [67]. Il carattere algebrico si vede immediatamente dalle formule di duplicazione.

[30] Il che è a dire che l'operazione si può condurre con l'ausilio di riga e compasso.

$$F\frac{\omega}{4} = \sqrt[4]{1 + \frac{e^2}{c^2}} = \sqrt{F\frac{\omega}{2}}.$$

B. *Espressione delle funzioni* $\varphi\frac{\alpha}{2n+1}, f\frac{\alpha}{2n+1}, F\frac{\alpha}{2n+1}$ *come funzioni algebriche di* $\varphi\alpha, f\alpha, F\alpha$.

14.

Per trovare i valori di $\varphi\frac{\alpha}{2n+1}, f\frac{\alpha}{2n+1}, F\frac{\alpha}{2n+1}$ in funzione di $\varphi\alpha,\ f\alpha,\ F\alpha$ occorre risolvere le equazioni

$$\varphi\alpha = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\ f\alpha = \frac{P'_{2n+1}}{Q'_{2n+1}},\ F\alpha = \frac{P"_{2n+1}}{Q"_{2n+1}},$$

che sono tutte di grado $(2n+1)^2$. Vedremo che è sempre possibile trovare algebricamente[31] tale soluzione.

Siano

[68] $$\varphi_1\beta = \sum_{m=-n}^{+n} \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right)$$

e

[69] $$\psi\beta = \sum_{\mu=-n}^{+n} \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right), \quad \psi_1\beta = \sum_{\mu=-n}^{+n} \theta^\mu$$

dove θ è una radice immaginaria qualsiasi dell'equazione $\vartheta^{2n+1} - 1 = 0$. Posto ciò, dico che le due quantità

$$\psi\beta.\psi_1\beta \quad \text{e} \quad (\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1}$$

possono essere espresse razionalmente mediante $\psi(2n+1)\beta$.

Scrivendo innanzitutto $\varphi_1\beta$ come segue[32]:

$$\varphi_1\beta = \varphi\beta + \sum_{m=1}^{+n}\left[\varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right) + \varphi\left(\beta - \frac{2m\omega}{2n+1}\right)\right] = \varphi\beta + \sum_{m=1}^{+n} \frac{2\varphi\beta.f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1 + e^2c^2\varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\varphi^2\beta}$$

si vede che $\varphi_1\beta$ si può esprimere razionalmente mediante $\varphi\beta$. Sia dunque $\varphi_1\beta = \chi(\varphi\beta)$, sia ha anche

$$\varphi_1\left(\beta \pm \frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right) = \chi\left[\varphi\left(\beta \pm \frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right)\right] = \chi\left\{\frac{\varphi\beta.f\left(\frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right)F\left(\frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right) \pm \varphi\left(\frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right)f\beta.F\beta}{1 + e^2c^2\varphi^2\left(\frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right)\varphi^2\beta}\right\},$$

[31] Nel caso degenere circolare, il grado dell'equazione è (2*n*+1). Per la bisezione abbiamo visto il grado essere 4=2².

[32] Per la prima delle [12].

ebbene, facendo

$$\varphi\beta = x, \quad f\left(\frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right)F\left(\frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right) = a, \quad \varphi\left(\frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right) = b,$$

e sostituendo a $f\beta$ e $F\beta$ i loro valori $\sqrt{1-c^2x^2}$ e $\sqrt{1+e^2x^2}$:

$$\varphi_1\left(\beta \pm \frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right) = \chi\left\{\frac{ax \pm b\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}{1+e^2c^2\varphi^2b^2x^2}\right\};$$

ora, poiché χ indica una funzione razionale, il secondo membro di questa equazione si può mettere nella forma

$$R_\mu \pm R'_\mu\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)},$$

dove R_μ e R'_μ sono due funzioni razionali di x. Si ha pertanto

$$\varphi_1\left(\beta \pm \frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right) = R_\mu \pm R'_\mu\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}.$$

Sostituendo nelle espressioni di $\psi\beta$ e $\psi_1\beta$, verrà

[70] $$\begin{cases} \psi\beta = \sum_{\mu=-n}^{+n}\theta^\mu R_\mu + \sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}\sum_{\mu=-n}^{+n}\theta^\mu R'_\mu, \\ \psi_1\beta = \sum_{\mu=-n}^{+n}\theta^\mu R_\mu - \sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}\sum_{\mu=-n}^{+n}\theta^\mu R'_\mu. \end{cases}$$

Inoltre, essendo R_μ e R'_μ due funzioni razionali di x, le quantità $\sum_{\mu=-n}^{+n}\theta^\mu R_\mu$ e $\sum_{\mu=-n}^{+n}\theta^\mu R'_\mu$ lo sono anch'esse. Elevando dunque $\psi\beta$ e $\psi_1\beta$ alla potenza (2n+1)-esima le due quantità $(\psi\beta)^{2n+1}$ e $(\psi_1\beta)^{2n+1}$ si possono mettere nella forma

$$(\psi\beta)^{2n+1} = t + t'\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)},$$

$$(\psi_1\beta)^{2n+1} = t - t'\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)},$$

essendo t, t' funzioni razionali di x. Prendendo la somma dei valori di $(\psi\beta)^{2n+1}$ e $(\psi_1\beta)^{2n+1}$ si avrà

$$(\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1} = 2t$$

Dunque la quantità $(\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1}$ può essere espressa razionalmente in x. Lo stesso accade per il prodotto $\psi\beta.\psi_1\beta$ come si vede dalle equazioni [70]. Si può dunque porre

[71] $$\begin{cases} \psi\beta.\psi_1\beta = \lambda x, \\ (\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1} = \lambda_1 x, \end{cases}$$

indicando λx e $\lambda_1 x$ funzioni razionali di x. Ora tali funzioni hanno la proprietà di non mutare valore allorché in luogo di x si mette una qualsiasi altra radice dell'equazione

$$\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Consideriamo innanzitutto la funzione λx. Ripristinando il valore di $x = \varphi\beta$, s'avrà

$$\psi\beta . \psi_1\beta \; = \lambda(\varphi\beta),$$

da dove si ottiene, mettendo $\beta + \frac{2k\omega}{2n+1} + \frac{2k'\varpi i}{2n+1}$ al posto di β,

$$\lambda\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1} + \frac{2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right] = \psi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1} + \frac{2k'\varpi i}{2n+1}\right) . \psi_1\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1} + \frac{2k'\varpi i}{2n+1}\right).$$

Posto questo, e tenendo presente che

[72] $$\sum_{m=-n}^{+n} \psi(m+k) = \sum_{m=-n}^{+n} \psi(m) + \sum_{n=1}^{k} [\psi(m+n) - \psi(m-n-1)],$$

si avrà, facendo nell'espressione di $\varphi_1(\beta)$ $\beta = \beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$,

$$\varphi_1\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \sum_{m=-n}^{+n} \varphi\left(\beta + \frac{2(k+m)}{2n+1}\omega\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{k}\left[\varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)}{2n+1}\omega\right) - \varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)}{2n+1}\omega\right)\right].$$

ora

$$\varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)}{2n+1}\omega\right) = \varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1} - 2\omega\right) = \varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right).$$

dunque

[73] $$\varphi_1\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \varphi_1\beta.$$

Mettendo nell'espressione di $\psi\beta$ $\beta = \beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}$ in luogo di β, si troverà

$$\psi\left(\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \sum_{\mu=-n}^{+n} \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right);$$

ora, in virtù della formula [73] si ha

$$\varphi_1\left(\beta + \frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \varphi_1\left(\beta + \frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right),$$

quindi

$$\psi\left(\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \sum_{\mu=-n}^{+n} \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right).$$

A causa della formula [72] si ha

$$\sum_{\mu=-n}^{+n} \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right) =$$

$$\theta^{-k'} \sum_{\mu=-n}^{+n} \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) + \sum_{\mu=1}^{k'} \theta^{n+\mu-k'} \varphi_1\left(\beta + \frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}\right)$$

$$-\sum_{\mu=1}^{k'} \theta^{\mu-n-1-k'} \varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu-n-1)\varpi i}{2n+1}\right),$$

donde, tenendo presente che[33] $\theta^{n+\mu-k'} = \theta^{\mu-n-1-k'}$ e che

$$\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu-n-1)\varpi i}{2n+1}\right)=\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}-2\varpi i\right)=\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}\right),$$

verrà

[74]
$$\psi\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\theta^{-k'}\psi\beta.$$

Si trova parimenti che

$$\psi_1\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\theta^{k'}\psi_1\beta.$$

Queste due equazioni daranno

$$\psi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\cdot\psi_1\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)=\psi\beta.\psi_1\beta,$$

$$\left[\psi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right]^{2n+1}+\left[\psi_1\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right]^{2n+1}=(\psi\beta)^{2n+1}+(\psi_1\beta)^{2n+1}.$$

In virtù di queste equazioni si otterrà, mettendo nei valori di $\lambda(\varphi\beta)$ e $\lambda_1(\varphi\beta)$ $\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}$ in luogo di β,

$$\lambda(\varphi\beta)=\lambda\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\omega i}{2n+1}\right)\right],$$

$$\lambda_1(\varphi\beta)=\lambda_1\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\omega i}{2n+1}\right)\right].$$

Ma $\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)$ rappresenta una radice qualsiasi dell'equazione[34]

$$\varphi(2n+1)\beta=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Dunque, come abbiamo detto, le funzioni λx e $\lambda_1 x$ assumeranno gli stessi valori quale che sia la radice che si mette al posto di x. Siano $x_0, x_1, \ldots x_{2\nu}$ queste radici. Si avrà

$$\lambda x=\frac{1}{2\nu+1}(\lambda x_0+\lambda x_1+\cdots+\lambda x_{2\nu}),$$

$$\lambda_1 x=\frac{1}{2\nu+1}(\lambda_1 x_0+\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_1 x_{2\nu}),$$

[33] È $\theta^{n-k'}=\theta^{-n-1-k'}$ per il fatto che $\theta^{2n+1}=1$.
[34] Come dato dalla [51.

Ora, il secondo membro di queste equazioni è una funzione *razionale e simmetrica* delle radici dell'equazione $\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, quindi λx e $\lambda_1 x$ potranno essere espresse razionalmente secondo $\varphi(2n+1)\beta$. Ponendo

$$\lambda x = B, \quad \lambda_1 x = 2A,$$

le equazioni [71] daranno

$$(\psi\beta)^{2n+1}.(\psi_1\beta)^{2n+1} = B^{2n+1}, \quad (\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1} = 2A,$$

da cui si ricava[35]

[75] $$\psi\beta = \sqrt[2n+1]{A + \sqrt{A^2 - B^{2n+1}}} = \sum_{\mu=-n}^{+n} \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

15.

Avendo trovato il valore di $\psi\beta$, si deduce facilmente quello di $\varphi_1\beta$. In effetti prendendo per θ in successione tutte le radici immaginarie dell'equazione $\theta^{2n+1} - 1 = 0$ ed indicando i corrispondenti valori di A e B con A_1, B_1, A_2, B_2, ecc. si otterrà

$$\sqrt[2n+1]{A_1 + \sqrt{{A_1}^2 - {B_1}^{2n+1}}} = \sum_{\mu=-n}^{+n} {\theta_1}^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

$$\sqrt[2n+1]{A_2 + \sqrt{{A_2}^2 - {B_2}^{2n+1}}} = \sum_{\mu=-n}^{+n} {\theta_2}^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

. . . . .

$$\sqrt[2n+1]{A_{2n} + \sqrt{{A_{2n}}^2 - {B_{2n}}^{2n+1}}} = \sum_{\mu=-n}^{+n} {\theta_{2n}}^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

Si conosce allo stesso modo la somma delle radici:

$$\sum_{m=-n}^{+n} \sum_{\mu=-n}^{+n} \varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1} + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \sum_{\mu=-n}^{+n} \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

che è uguale a $(2n+1)\varphi(2n+1)\beta$, come vedremo nel seguito. Sommando membro a membro queste equazioni, dopo aver moltiplicato la prima per ${\theta_1}^{-k}$, la seconda per ${\theta_2}^{-k}$, la terza per ${\theta_3}^{-k}$ … e la $2n$-sima per la seconda per ${\theta_{2n}}^{-k}$, verrà

[35] L'equazione in $z = (\psi\beta)^{2n+1}$ è $z + \frac{B^{2n+1}}{z} = 2A$ da cui la soluzione.

$$\sum_{\mu=-n}^{+n}\left(1+\theta_1{}^{\mu-k}+\theta_2{}^{\mu-k}+\cdots+\theta_{2n}{}^{\mu-k}\right)\varphi_1\left(\beta+\frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right)=$$
$$(2n+1)\varphi(2n+1)\beta+\sum_{\mu=1}^{2n}\theta_\mu{}^{-k}\sqrt[2n+1]{A_\mu+\sqrt{A_\mu{}^2-B_\mu{}^{2n+1}}};$$

ma la somma

$$1+\theta_1{}^{\mu-k}+\theta_2{}^{\mu-k}+\cdots+\theta_{2n}{}^{\mu-k}$$

si riduce a zero[36] per tutti i valori di k, eccetto che per $k=\mu$. In tal caso essa diviene uguale a $2n+1$. Di conseguenza il primo membro dell'equazione precedente diventa

$$(2n+1)\varphi_1\left(\beta+\frac{2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right),$$

quindi, sostituendo e dividendo per $(2n+1)$ si ha

[76]
$$\varphi_1\left(\beta+\frac{2k\bar{\omega}i}{2n+1}\right)=\varphi(2n+1)\beta$$
$$+\frac{1}{2n+1}\left[\theta_1{}^{-k}\sqrt[2n+1]{A_1+\sqrt{A_1{}^2-B_1{}^{2n+1}}}+\right.$$
$$\left.\theta_2{}^{-k}\sqrt[2n+1]{A_2+\sqrt{A_2{}^2-B_2{}^{2n+1}}}+\cdots+\theta_{2n}{}^{-k}\sqrt[2n+1]{A_{2n}+\sqrt{A_{2n}{}^2-B_{2n}{}^{2n+1}}}\right].$$

Per k=0 si ha

[77]
$$\varphi_1\beta=\varphi(2n+1)\beta+$$
$$\frac{1}{2n+1}\left[\sqrt[2n+1]{A_1+\sqrt{A_1{}^2-B_1{}^{2n+1}}}+\sqrt[2n+1]{A_2+\sqrt{A_2{}^2-B_2{}^{2n+1}}}+\cdots+\sqrt[2n+1]{A_{2n}+\sqrt{A_{2n}{}^2-B_{2n}{}^{2n+1}}}\right].$$

16.

Avendo trovato così il valore di $\varphi_1\beta$, si tratta di ricavare quello di $\varphi\beta$. Ma questo si può fare agevolmente come segue. Sia

[78]
$$\psi_2\beta=\sum_{m=-n}^{+n}\theta^m\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right),\quad \psi_3\beta=\sum_{m=-n}^{+n}\theta^m\varphi\left(\beta-\frac{2m\omega}{2n+1}\right),$$

si ha

$$\varphi\left(\beta\pm\frac{2m\omega}{2n+1}\right)=\frac{\varphi\beta.f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\pm f\beta.F\beta.\varphi\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\varphi^2\beta}.$$

Segue da qui che si può scrivere

[36] Perché θ è una radice dell'equazione ciclotomica di grado $2n+1$.

$$\psi_2\beta = r + f\beta.F\beta.s, \quad \psi_3\beta = r - f\beta.F\beta.s,$$

ove r e s sono funzioni razionali di $\varphi\beta$. Di qua si ricava

[79] $$\begin{cases} \psi_2\beta.\psi_3\beta = \chi(\varphi\beta), \\ (\psi_2\beta)^{2n+1} + (\psi_3\beta)^{2n+1} = \chi_1(\varphi\beta), \end{cases}$$

essendo $\chi(\varphi\beta)$ e $\chi_1(\varphi\beta)$ due funzioni razionali di $\varphi\beta$.

Posto ciò, io affermo che $\chi(\varphi\beta)$ e $\chi_1(\varphi\beta)$ si possono esprimere razionalmente secondo $\varphi_1\beta$. Abbiamo visto che

[80] $$\varphi_1\beta = \varphi\beta + \sum_{m=1}^{n} \frac{2\varphi\beta.f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\varphi^2\beta}.$$

Facendo $\varphi\beta = x$, si otterrà un'equazione di grado (2*n*+1) in *x*. Una radice di questa equazione è $x = \varphi\beta$; ora mettendo $\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$ al posto di β, non cambia il valore di $\varphi_1\beta$; quindi $x = \varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)$ sarà ancora una radice, quale che sia il numero intero *k*. Assegnando ora a *k* tutti i valori interi da –*n* fino a +*n*, $\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)$ assumerà 2*n*+1 valori differenti, quindi queste 2*n*+1 quantità costituiscono precisamente le 2*n*+1 radici dell'equazione in *x*.

Detto ciò, ponendo $\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$ al posto di β nell'espressione di $\psi_2\beta$ verrà, per l'equazione [72],

$$\psi_2\left(\frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \sum_{m=-n}^{+n} \theta^m \varphi\left(\beta + \frac{2(k+m)\omega}{2n+1}\right) = \theta^{-k}\psi_2\beta + \sum_{m=1}^{k} \theta^{m+n-k}\varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right) - \sum_{m=1}^{k} \theta^{m-n-1-k}\varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)\omega}{2n+1}\right),$$

e quindi, poiché $\theta^{m+n-k} = \theta^{m-n-1-k}$ e $\varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)\omega}{2n+1}\right) = \varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right)$, si ricava che

[81] $$\psi_2\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \theta^{-k}\psi_2\beta.$$

Si avrà parimenti

$$\psi_3\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \theta^{+k}\psi_3\beta.$$

Si vede da queste relazioni che le equazioni che forniscono i valori delle funzioni $\chi(\varphi\beta)$ e $\chi_1(\varphi\beta)$ conducono a queste due uguaglianze:

$$\chi\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right] = \chi(\varphi\beta),$$

$$\chi_1\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right] = \chi_1(\varphi\beta).$$

Donde si ricava

$$\chi(\varphi\beta) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{+n} \chi\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right],$$

$$\chi_1(\varphi\beta) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{+n} \chi_1\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right].$$

Ma questi valori di $\chi(\varphi\beta)$ e $\chi_1(\varphi\beta)$ sono funzioni razionali e simmetriche di tutte le radici dell'equazione [80]. Esse quindi si possono esprimere razionalmente mediante i coefficienti della equazione stessa, il che è dire razionalmente secondo $\varphi_1\beta$.

Sia

$$\chi(\varphi\beta) = D, \quad \chi_1(\varphi\beta) = 2C,$$

le equazioni [79] daranno

[82] $$\psi_2\beta = \sqrt[2n+1]{C + \sqrt{C^2 - D^{2n+1}}},$$

Da cui, reintroducendo il valore di $\psi_2\beta$,

$$\sqrt[2n+1]{C + \sqrt{C^2 - D^{2n+1}}} = \sum_{m=-n}^{+n} \theta^m \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right).$$

Unendo l'equazione

$$\varphi_1\beta = \textstyle\sum_{m=-n}^{+n} \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right),$$

si ricava facilmente

[83] $$(2n+1).\varphi\left(\beta + \tfrac{2k\omega}{2n+1}\right) = \varphi_1\beta + \textstyle\sum_{\mu=1}^{2n} \theta_\mu^{-k} \sqrt[2n+1]{C_\mu + \sqrt{{C_\mu}^2 - {D_\mu}^{2n+1}}}.$$

Supponendo k=0 verrà

[84] $$\varphi\beta = \frac{1}{2n+1}\left[\varphi_1\beta + \sqrt[2n+1]{C_1 + \sqrt{{C_1}^2 - {D_1}^{2n+1}}} + \cdots + \sqrt[2n+1]{C_{2n} + \sqrt{{C_{2n}}^2 - {C_{2n}}^{2n+1}}}\right].$$

Questa equazione fornisce $\varphi\beta$ in funzione algebrica di $\varphi_1\beta$; ma abbiamo in precedenza[37] trovato $\varphi_1\beta$ come funzione algebrica di $\varphi(2n+1)\beta$. Mettendo dunque $\frac{\alpha}{2n+1}$ al posto di β si otterrà $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ come funzione algebrica di $\varphi\alpha$.

[37] Formula [77]. Combinando le due otteniamo che

Con una analisi del tutto simile si troverà $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ in funzione di $f\alpha$ e $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ in funzione di $F\alpha$.[38]

$$\varphi\beta = \frac{1}{2n+1}\left[\varphi(2n+1)\beta + \frac{1}{2n+1}\sum_{p=1}^{2n}\sqrt[2n+1]{A_p + \sqrt{{A_p}^2 - {B_p}^{2n+1}}} + \sum_{p=1}^{2n}\sqrt[2n+1]{C_p + \sqrt{{C_p}^2 - {D_p}^{2n+1}}}\right].$$

[38] Si intende che anche queste due espressioni sono algebriche.