Perdita di certezze

Ultimi anni delle scuole elementari: compare una parola magica: commutativa. L'addizione gode della proprietà commutativa, ben sappiamo che se sommo due numeri non ha affatto importanza l'ordine di somma in quanto il risultato è il medesimo in ogni caso.

Crescendo un po' capiamo che lo stesso vale per la differenza, a patto che ogni termine dell'operazione, spostandosi, porti con sé il proprio segno caratteristico (e noi la chiamiamo algebra).

Poi passiamo all'analisi e scopriamo che una serie, cioè una somma di infiniti termini, può avere somma finita, più o meno facilmente calcolabile (intendo in forma chiusa).

Ad esempio sappiamo che

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\ldots\pm\frac{1}{n}\cdots=\ln 2=l_1$$

Rivediamo la stessa serie come somme di coppie $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ che danno luogo al termine generale $\frac{1}{4n^2-2n}$. La convergenza della serie è assicurata dal fatto che il termine generale si comporta asintoticamente come $\frac{1}{4n^2}$. In effetti il termine generale è maggiore di tale valore ed infatti $\ln 2>\frac{1}{4}\zeta(2)$.

Se ora spostiamo innocentemente gli addendi negativi in modo che seguano una coppia di termini positivi otteniamo la serie

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\pm\cdots\cdots=l_2$$

Il suo termine generale diventa $\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{8n-3}{32n^3-32n^2+6n}$. Esso è maggiore di $\frac{1}{4n^2-2n}$, pur comportandosi asintoticamente alla stessa maniera. Infatti

$\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}>\frac{2}{4n-2}=\frac{1}{2n-1}$.

La somma l_2 si riesce a valutare in forma chiusa, in effetti è

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\pm\cdots\cdots=l_2=\frac{3}{2}l_1$$

L'ultima uguaglianza si giustifica attraverso il seguente ragionamento:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\ldots\pm\frac{1}{2n}\cdots=\frac{1}{2}l_1$$

sommando questa all'espressione per l_1 abbiamo

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\pm\cdots\quad+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\pm\cdots$$

i termini del tipo $\frac{1}{2(2m-1)}$ si elidono a due a due tra loro perché hanno segno opposto, quelli del tipo $\frac{1}{4m}$ sono tutti negativi e la loro somma a due a due è quindi $-\frac{2}{4m}$, col che restano: una coppia di frazioni positive con denominatore dispari seguita da una frazione con denominatore pari con il segno negativo, che è proprio l_2:

$$l_1+\frac{1}{2}l_1=\frac{3}{2}l_1=l_2$$

Formalizziamo il problema in generale: data una serie convergente a termini alterni

$$S_1=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6\pm\cdots$$

se ne possono ricavare altre spostando ogni termine di indice pari dopo k termini di indice dispari, ad esempio la serie S_3 sarà ottenuta riordinando i termini di S_1 in maniera che ci sia un termine negativo dopo tre consecutivi positivi:

$$S_3 = a_1 + a_3 + a_5 - a_2 + a_7 + a_9 + a_{11} - a_4 \pm \cdots$$

Nel caso della serie armonica a segni alterni la somma sarà indicata come l_k, quindi

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} \pm \cdots \cdots = l_3$$

Il suo termine generale è

$$\frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{108n^2 - 92n + 15}{432n^4 - 648n^3 + 276n^2 - 30n}$$

la cui componente dominante è sempre $\frac{1}{4n^2}$. La successione l_k è monotona crescente; vi sono alcuni valori notevoli, come

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{4} \pm \cdots \cdots = l_4 = 2\ln 2$$

Seguendo il medesimo metodo già visto prima, se a l_2 sommiamo ancora $\frac{1}{2} l_1$ allora di nuovo i termini aventi denominatore doppio di un numero dispari si elideranno, mentre quelli di denominatore doppio di un pari, che sono negativi, si sommeranno ed avremo quattro termini positivi di denominatore dispari consecutivi ed uno di denominatore pari negativo:

$$l_2 + \frac{1}{2} l_1 = \frac{4}{2} l_1 = 2l_1 = l_4$$

Il procedimento si può iterare sommando ancora la metà di l_1 per cui resterà un numero doppio di termini con denominatori dispari positivi seguiti da uno di denominatore pari negativo:

$$l_4 + \frac{1}{2} l_1 = \frac{5}{2} l_1 = l_8$$

e quindi, induttivamente,

$$l_{2^m} = \frac{m+2}{2} l_1$$

Si tratta dell'unico caso che gode di tale proprietà, visto che per denominatori diversi dai naturali, ossia di tipo *an*+*b* ove $a \nmid b$, non è mai possibile trovare un multiplo comune ad una successione infinita di termini il cui indice sia in progressione aritmetica.

La serie armonica a segni alterni non è l'unica ad esibire un tale comportamento. Se ai naturali sostituiamo al denominatore i numeri dispari otteniamo una antica conoscenza:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} \dots \pm \frac{1}{2n-1} \cdots = \frac{\pi}{4} = \pi_1$$

il cui termine generale è $\frac{2}{4n^2-1}$.

Effettuando uno spostamento dei termini negativi in modo che uno segue due positivi, otteniamo

$$1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} - \frac{1}{7} + \frac{1}{17} + \frac{1}{21} - \frac{1}{11} \cdots = \pi_2$$

Il suo termine generale è

$$\frac{1}{8n-7} + \frac{1}{8n-3} - \frac{1}{4n+1} = \frac{56n-31}{256n^3 - 256n^2 + 4n + 21} \sim \frac{7}{32n^2}$$

per cui la serie converge: $\pi_2 \approx 1{,}494\pi_1$.

Vediamo cosa accade alla serie generale a termini alterni del tipo $\frac{1}{pn-(p-1)}$ ove sia $p>1$: la serie basica a segni alterni converge, quella con k spostamenti ha il comportamento asintotico $\frac{R(p)}{n^2}$ dove $R(p)$ è una funzione razionale di p, e pertanto converge.

Ricordiamo a tal segno il risultato generale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{pn+m} = \frac{1}{p}\beta\left(\frac{m}{p}\right)$$

dove β è la funzione beta di Dirichlet.

È possibile anche effettuare uno spostamento nel verso opposto. Nel caso della serie armonica a segni alterni questo vuol dire che ad un termine con il segno positivo seguono due termini con il segno negativo:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\pm\cdots\cdots=l_{-2}$$

Il suo termine generale diventa $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{8n^2-4n}$. Esso si comporta come $\frac{1}{8n^2}$ e pertanto la serie converge; il valore di convergenza è $l_{-2}=\frac{1}{2}\ln 2$. Ciò si vede immediatamente sommando i primi due termini $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}=\frac{1}{2(n-1)}$ per cui il termine generale è $\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2\cdot 2n}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2n}\right]$ che è appunto la metà del termine generale che somma a $\log 2$.

Lo spostamento successivo conduce alla serie

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\pm\cdots\cdots=l_{-3}$$

il cui termine generale è $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{6n-4}-\frac{1}{6n-2}-\frac{1}{6n}\sim\frac{1}{12n^2}$ la somma vale circa 0,2075.

Abbiamo poi $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\pm\cdots\cdots=l_{-4}=0$

Si tratta di un risultato particolare. Dal momento che la somma dei primi cinque termini vale -1/24 abbiamo che

$$\sum_{n>1}\frac{16n^2-20n+3}{256n^4-384n^3+176n-24}=\frac{1}{24}$$

Possiamo anche studiare serie miste del tipo $l_{a,b}$ nelle quali ad a termini positivi seguono b negativi, si deve supporre che sia $a \nmid b$, altrimenti la serie torna ad essere quella originaria.

Sia ad esempio

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\pm\cdots\cdots=l_{3,2}$$

Il termine generale si comporta come $\frac{1}{8n^2}$, la serie converge al valore $l_{3,2}\approx 1{,}29l_1$

Mentre la serie

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\pm\cdots\cdots=l_{2,3}$$

il cui termine generale si comporta come $\frac{1}{12n^2}$, converge al valore $l_{2,3}\approx 0{,}71l_1$.

Sia ancora

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{11}\ldots-\frac{1}{8}\pm\cdots\cdots=l_{5,3}$$

il cui termine generale si comporta come $\frac{1}{12n^2}$, converge al valore $l_{5,3}\approx 1{,}21l_1$.

Le successioni tipo $l_{a,b}$ sono crescenti se a>b al crescere della differenza *a*-*b*, decrescenti in caso contrario.

Lo studio di serie miste del tipo $\pi_{a,b}$ nelle quali di nuovo ad a termini positivi seguono b negativi, con $a \nmid b$, conduce a risultati diversi rispetto al caso precedente.

Sia ad esempio

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{21}-\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\pm\cdots\cdots=\pi_{3,2}$$

Il termine generale si comporta come $\frac{5}{96n^2}$, la serie converge al valore $\pi_{3,2} \approx 1{,}129\pi_1$.

Invece

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\pm\cdots\cdots=\pi_{2,3}\approx 0{,}871\pi_1$$

Nel caso della serie di Leibnitz-McGregory, che restituisce $\pi/4$, sommando π_1 alla sua metà otteniamo

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}\ldots+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{18}\ldots=$$

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}-\frac{1}{15}+\cdots$$

L'andamento di ripete ogni 6 termini, per cui abbiamo una serie a segni che si succedono secondo il ciclo [+ + - + - -] aventi per denominatori tutti i numeri naturali che non sono multipli di 4, chiamiamo questa serie $\pi_{2,1,1,2\backslash 4}$, il suo valore è $\frac{3\pi}{8}$.

Se invece che sommare sottraiamo:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}\ldots-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{14}-\frac{1}{18}\ldots=$$

$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{15}+\cdots$ allora, con le stesse notazioni

$$\pi_{1,2,2,1\backslash 4} = \frac{\pi}{8}$$

Invece che la metà, si può sommare (o sottrarre) una frazione qualsiasi avente per denominatore un intero positivo qualsiasi. Allora se si sommano le serie nella risultante mancheranno i termini multipli di quell'intero, se è dispari, o compariranno espressioni più articolate se il multiplo è pari.

Una considerazione finale: riconsideriamo uno qualsiasi degli spostamenti che abbiamo visto, ad esempio quello che ci fa passare da l_1 a l_2 : c'è una ragione profonda sul perché appare essere violata la commutatività dell'addizione. Consideriamo la distribuzione degli addendi nei due casi; nel primo abbiamo

$$l_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \cdots$$

definitivamente il numero di addendi positivi è uguale al numero di addendi negativi, come si vede dai termini compresi tra i le ellissi, il loro contributo è praticamente uguale, quando *n* è molto grande, la loro differenza essendo $\frac{1}{4n^2-2n}$. Nel secondo caso invece è

$$l_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{2n} \dots$$

definitivamente il numero di addendi positivi è uguale al doppio del numero di addendi negativi, come si vede dai termini compresi tra i le ellissi, anche in questo caso il contributo dei primi termini due è praticamente uguale al terzo, quando *n* è molto grande, ma la loro differenza è maggiore di $\frac{1}{4n^2-4n} = \frac{1}{4n^2-2n-2n}$. Confrontando i valori asintotici di quelle due differenze, vediamo che la loro differenza vale a sua volta $\frac{1}{8n^3-12n^2+4n}$ che dà un contributo non nullo alla somma totale.

Quindi, alla fine: lo spostamento di un termine sbilancia l'equilibrio dei contributi: il numero dei positivi diventa il doppio di quello dei negativi, ma la loro somma vale asintoticamente $\frac{1}{2n-2}$ laddove nella serie originale il termine antecedente vale $\frac{1}{2n-1}$: basta questa diminuzione di una unità del denominatore a modificare sensibilmente il valore della somma. La differenza tra tali contributi è paragonabile a $\frac{1}{4}\zeta(2)$.

Il teorema di trasposizione di Riemann-Dini afferma un fatto molto più ampio ossia che, data una serie semplicemente ma non assolutamente convergente, esiste un riordinamento dei suoi termini tale che la somma della serie ottenuta mediante tale riordinamento converge ad un qualsiasi numero reale.

Facciamo a tal segno due esempi. Vogliamo ottenere l'unità da opportune serie di tipo π_x e l_x . Qui x indica una opportuno riordinamento tale da soddisfare il requisito.

Procediamo come segue; nella serie originale

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}\dots\pm\frac{1}{2n-1}\dots=\frac{\pi}{4}=\pi_1$$

effettuiamo un raggruppamento di tanti termini positivi quanti bastano a rendere la loro somma maggiore della quantità voluta, nel nostro caso 1, i primi termini saranno quindi

$$1+\frac{1}{5}$$

ora aggiungiamo tanti termini negativi della serie originale fino a che la somma risultante sia minore della quantità voluta, ossia 1, avremo

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}$$

di nuovo aggiungiamo ulteriori termini positivi fino a superare ancora 1:

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}$$

e sottraiamone tanti da tornare ad avere una somma minore di 1:

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}-\frac{1}{7}$$

superiamo ancora l'unità con termini positivi

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}-\frac{1}{7}+\frac{1}{17}+\frac{1}{21}$$

e scendiamone al di sotto

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}-\frac{1}{7}+\frac{1}{17}+\frac{1}{21}-\frac{1}{11}$$

Procederemo così, aggiungendo termini positivi e poi negativi, di modo che:

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}-\frac{1}{7}+\frac{1}{17}+\frac{1}{21}-\frac{1}{11}+\frac{1}{25}+\frac{1}{29}-\frac{1}{15}+\frac{1}{33}+\frac{1}{37}+\frac{1}{41}-\frac{1}{19}\ldots=1$$

Con gli inversi dei naturali abbiamo

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{8}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{14}+\frac{1}{17}-\frac{1}{16}+\frac{1}{19}\ldots=1$$

Se avessimo voluto ottenere la somma -1 con la successione degli inversi dei dispari avremmo dovuto scrivere 1 seguito da 1006 addendi della forma $-\frac{1}{4n-1}$, proseguire con +1/5 e poi altri 1234 termini negativi, +1/9 e poi altri 1253 negativi e così via.

Naturalmente anche π è un numero, quindi possiamo ottenerlo sia dalla serie dei reciproci dei dispari che da quella dei naturali.

Nel primo caso occorre sommare 4184 termini positivi, da 1 fino a $\frac{1}{16733}$ poi sommare $-\frac{1}{3}$ sommare ancora altri 11688 termini positivi fino a $\frac{1}{63485}$ e così via.

Nel secondo caso occorre sommare 76 termini positivi, da 1 fino a $\frac{1}{151}$ poi sommare $-\frac{1}{2}$, sommare ancora altri 129 termini positivi fino a $\frac{1}{409}$, aggiungere $-\frac{1}{4}$, ulteriori 132 termini positivi fino a $\frac{1}{673}$ e così via.

Con il medesimo procedimento possiamo ottenere il numero *e* oppure Φ, il numero aureo, o qualsiasi altra costante si voglia, sia essa positiva o negativa.