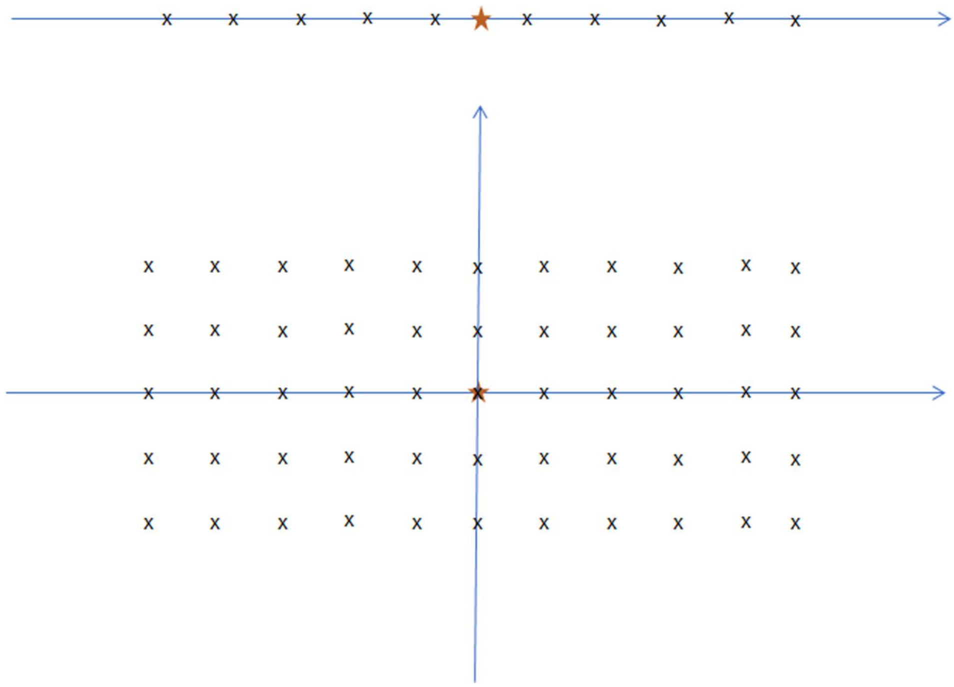
Margherita e origano

I numeri interi giacciono *equidistanziati* su una retta, che per comodità diciamo retta reale. Essi formano una maglia unidimensionale, dalla quale, per motivi che vediamo immediatamente dopo, escludiamo lo zero, chiamiamo tale insieme $\mathbb{N}_0$.

I numeri complessi la cui parte reale e la cui parte immaginaria sono numeri interi stanno *equidistanziati* su un piano, che per comodità diciamo essere formato dalla suddetta retta reale intersecata perpendicolarmente dalla retta immaginaria. Tutti questi punti formano una maglia bidimensionale, dalla quale, per i medesimi motivi, escludiamo lo zero, chiamiamo tale insieme $\mathbb{Z}_0$.



La maglia mono- e bi-dimensionale

I due insiemi $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Z}_0$ sono entrambi infiniti ma numerabili, e possono essere messi in corrispondenza biunivoca, ciò nondimeno essendo $\mathbb{Z}_0 = (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \cup i\mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_0$ possiamo dire che il "numero di elementi" di $\mathbb{Z}_0$ è "un po' di più" del "quadrato del numero di elementi"; in una notazione "non standard" derivata dall'omonima analisi, possiamo dire con poco scandalo, se C è la cardinalità dei due insiemi, che

$$(1) \quad \mathrm{C}(\mathbb{Z}_0) = \mathrm{C}[(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \cup i\mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_0] = \infty^2 + 2\infty$$

poiché $i\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{N}_0 = \emptyset$.

Sappiamo calcolare, lo insegnano alle elementari a Basilea, la somma

$$(2)\qquad \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}\approx 3.289868133696452$$

come pure le somme

$$(3)\qquad \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{45}$$

$$(4)\qquad \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{n^6}=\frac{2\pi^6}{945}$$

$$(5)\qquad \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{4725}$$

Possiamo, visto che spaziamo sull'intero piano complesso, calcolare le somme

$$(6)\qquad \sum_{z\in\mathbb{Z}_0}\frac{1}{z^k}$$

Per la (1), data la sovrabbondante "numerosità" del numero di addendi, maggiore del quadrato rispetto al caso svizzero, riteniamo che debba aversi $k>2$: l'esponente deve essere almeno doppio del caso di convergenza della funzione ζ. Per tale motivo, per paragonare tra loro adeguatamente le cose, cercheremo la somma di

$$(7)\qquad \sum_{z\in\mathbb{Z}_0}\frac{1}{z^4}$$

Scriviamo ora per esteso il valore della generica base al denominatore $z=x+iy$, abbiamo

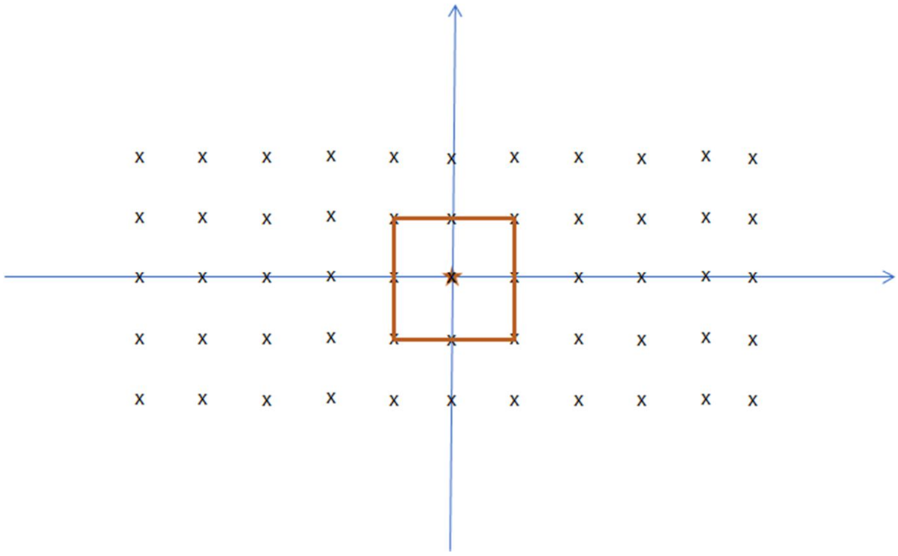
$$\frac{1}{z^4}=\frac{1}{(x+iy)^4}=\frac{(x^4+y^4-6x^2y^2)-i(4x^3y-4xy^3)}{(x^2+y^2)^4}$$

nella quale espressione x,y possono assumere tutti i valori interi, zero incluso, a patto che sia $|x|+|y|\neq 0$, ossia che non siano entrambi contemporaneamente nulli, ovvero che non ci troviamo nell'origine degli assi. Per calcolare la somma (7) procediamo a quadrati concentrici allontanandoci man mano dall'origine. Partiamo dal quadrato di dimensioni minime, corrispondente alla condizione

$$|x|,|y|\leq 1$$

ovvero consideriamo tutti e solo i punti le cui coordinate non superino l'unità. Si tratta degli 8 punti seguenti: (1,0) – (1,1) – (0,1) – (-1,1) – (-1,0) – (-1,-1) – (0, -1) – (1,-1). In essi abbiamo che la somma vale

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{1}-\frac{1}{4}=3$$



Passiamo ora al quadrato successivo, i cui punti soddisfano

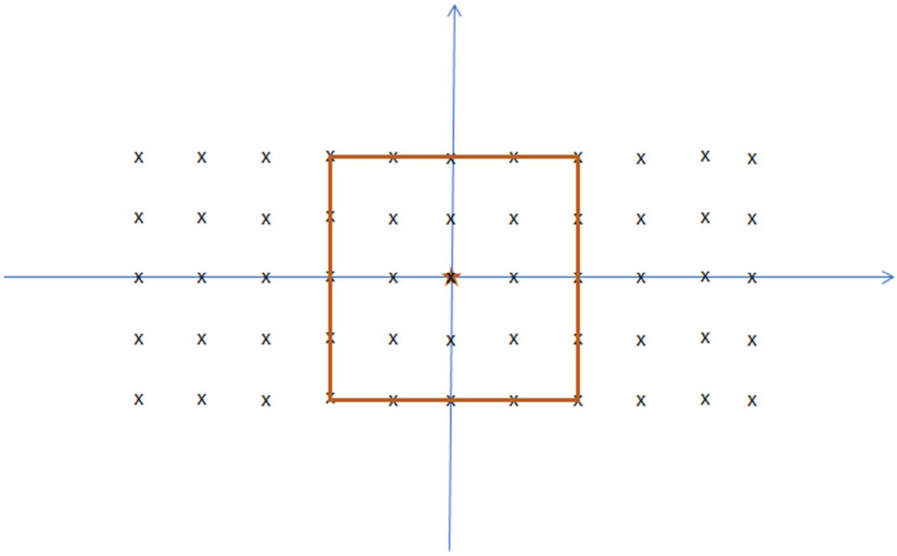
$$|x|,|y| \leq 2$$

ma non sono inclusi nell'insieme precedente; si tratta di 16 punti cha hanno coordinate (2,0) – (2,1) – (2,2) – (1,2) – (0,2) – (-1,2) – (-2, 2) – (-2, 1) – (-2,0) – (-2-1) – (-2,-2) – (-1,-2) – (0,-2) – (1,-2) – (2,-2) – (2,-1). In essi abbiamo che la somma vale

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{-7+24i}-\frac{1}{64}+\frac{1}{-7-24i}+\frac{1}{16}+\frac{1}{-7+24i}-\frac{1}{64}+\frac{1}{-7-24i}+\frac{1}{16}+\frac{1}{-7+24i}$$
$$-\frac{1}{64}+\frac{1}{-7-24i}+\frac{1}{16}+\frac{1}{-7+24i}-\frac{1}{64}+\frac{1}{-7-24i}$$

Lo abbiamo scritto per esteso solo questa volta. In realtà i punti o sono del tipo $(\pm 2, \pm 2)$ e qui l'addendo vale $-\frac{1}{64}$, o del tipo $(\pm 1, \pm 2)$ e indipendentemente dal loro ordine l'addendo vale $\frac{1}{-7\pm 24i}$ a seconda che i punti abbiano coordinate rispettivamente concordi o discordi, o ancora $(0, \pm 2)$ e indipendentemente dall'ordine l'addendo vale $\frac{1}{16}$ per cui abbiamo il contributo

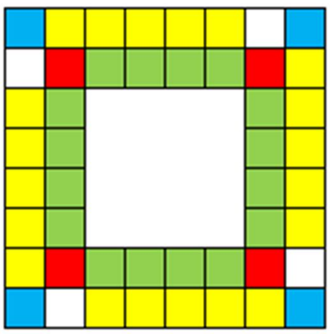
$$4\cdot\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\frac{1}{-7+24i}+\frac{1}{-7-24i}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{64}-\frac{14}{625}\right)=\frac{979}{10000}=0.0979$$



Non proseguiamo pedissequamente, ma annotiamo le varie regolarità. Sulle diagonali principali dei vari quadrati abbiamo $x = y$, che dà il contributo $-\frac{1}{4x^4}$, la somma di (x, y) e (y, x) dà $\frac{2(y^2-2xy-x^2)(y^2+2xy-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ che è reale, visto che i contributi immaginari puri si elidono. Ciò naturalmente accade sempre, poiché tutte le coppie sono simmetriche, ovvero a ciascun punto di coordinate (x, y) corrisponde immancabilmente il punto di coordinate (y, x). La somma (7) pertanto è reale.

Il contributo (il lettore può divertirsi a calcolarlo) del quadrato di vertici $(\pm 3, \pm 3)$ comprendente 24 punti è uguale a 0.026104871; quello del quadrato di vertici $(\pm 4, \pm 4)$ costituito da 32 punti reca un contributo di 0.010747061, quello successivo, di 40 punti, 0.005441037.

A ciascun passaggio si guadagnano altri 8 punti, corrispondenti ai 4 nuovi vertici e ad un ulteriore punto adiacente a ciascun vertice, come da figura



Il contributo totale del nuovo quadrato è inferiore, secondo una fattore $\frac{1}{1+\alpha}$ con $0 < \alpha \to 0$. Ciò garantisce la convergenza della serie (7). Il suo valore approssimato è

$$(8) \quad \sum_{z\in\mathbb{Z}_0} \frac{1}{z^4} = \frac{\widetilde{\omega}^4}{15} \approx 3.151212002154403$$

In effetti la somma dei contributi dei primi 5 termini è 3.140192967.

La comparsa della costante $\widetilde{\omega}$ che è la lunghezza di un lobo (che insiste su due quadranti del piano) della lemniscata, ed è l'analogo di π per la circonferenza, non meraviglia se pensiamo che per la serie (2) la comparsa dell'archimedeo simbolo è collegato al valore degli zeri delle funzioni circolari, in particolare il seno. La maglia unidimensionale è intimamente correlata all'equidistanza degli zeri di $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$, che sono appunto $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

La maglia bidimensionale è appoggiata sul quadrato unitario, di vertici $\pm 1 \pm i$ con le 4 possibili permutazioni dei segni. Su essa sappiamo essere costruita la funzione ellittica di corrispondenti periodi, poli e zeri doppi, tutti nel quadrato fondamentale. A sua volta tale funzione ellittica ha appunto gli zeri in multipli complessi di $\widetilde{\omega}$, da qui la somma.

Il passo successivo è capire come si comporta la serie

$$(9) \quad \sum_{z\in\mathbb{Z}_0} \frac{1}{z^6}$$

ossia se essa è in relazione con un multiplo razionale di $\widetilde{\omega}^6$. Innanzitutto si ha che

$$\frac{1}{z^6} = \frac{1}{(x+iy)^6} = \frac{(x^6 - y^6 + 15x^2y^4 - 15x^4y^2) - i(6xy^5 - 20x^3y^3 + 6x^5y)}{(x^2+y^2)^6}$$

In questo caso sono i contributi della parte reale ad annullarsi tra loro, mentre quelli della parte immaginaria restano non nulli, come c'era da attendersi, vista la presenza di un esponente "disparimenti pari" ovvero uguale al prodotto di 2 per un numero dispari. Quindi la (9) è

$$(10) \quad \sum_{z\in\mathbb{Z}_0} \frac{1}{z^6} = -i \sum_{z\in\mathbb{Z}_0} \frac{6xy^5 - 20x^3y^3 + 6x^5y}{(x^2+y^2)^6}$$

.

Nel primo quadrato $|x|, |y| \le 1$ abbiamo che la somma è nulla; nel secondo quadrato, di lato 4, abbiamo ancora una somma nulla.

Consideriamo un quadrato avente un vertice di coordinate (k, k). La somma (10) è costituita dai seguenti contributi.

Se il punto è almeno una coordinata nulla allora il contributo è nullo, visto che il numeratore è una funzione omogenea:

$$(10.1) \quad \sum_{xy=0} \frac{6xy^5 - 20x^3y^3 + 6x^5y}{(x^2+y^2)^6} = 0$$

Nei quattro vertici abbiamo

$$(10.2) \quad \sum_{|xy|=k^2} \frac{2(6k^6 - 20k^6 + 6k^6) + 2(-6k^6 + 20k^6 - 6k^6)}{2k^{12}} = 0$$

Abbiamo poi tutte le quadruple di tipo (x,y), $(-x,-y)$, $(x,-y)$, $(-x,y)$: le prime due coppie danno una somma pari a $\frac{4xy(y^2-3x^2)(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^6}$, le seconde due una somma pari ad un valore opposto: i contributi totali quindi si annullano per cui, alla fine:

$$(11) \quad \sum_{z\in\mathbb{Z}_0} \frac{1}{z^6} = 0$$

Vale la pena vedere cosa succede alla serie

$$(12) \quad \sum_{z\in\mathbb{Z}_0} \frac{1}{z^8} = \frac{x^8 + y^8 - 28x^2y^6 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - ixy(8x^6 - 8y^6 + 56x^2y^4 - 56x^4y^2)}{(x^2+y^2)^8}$$

La componente immaginaria si vede subito essere nulla, quando sommata su tette le coppie simmetriche; resta la componente reale.

Sul primo quadrato il contributo vale $\frac{17}{4}$; sul secondo quadrato vale $\frac{2323441}{400000000} = 0.0058086025$. Si può continuare con i calcoli; si giungerà a vedere che

$$(13) \quad \sum_{z\in\mathbb{Z}_0} \frac{1}{z^8} = \frac{\widetilde{\omega}^8}{525}$$

Come per la sesta potenza anche la decima è nulla, per lo stesso motivo. Non è nulla la somma

$$(14) \quad \sum_{z\in\mathbb{Z}_0} \frac{1}{z^{12}} = \frac{2\widetilde{\omega}^{12}}{53625}$$

La somma non nulla successiva è

$$(15) \quad \sum_{z\in\mathbb{Z}_0} \frac{1}{z^{16}} = \frac{\widetilde{\omega}^{16}}{1243125}$$

Se osserviamo i contributi delle somme di z^{-4k} dati dal primo quadrato abbiamo la successione

$$\left\{3, \frac{17}{4}, \frac{63}{16}, \frac{257}{64}, \frac{1023}{256}, \dots, \frac{4^k + (-1)^k}{4^{k-1}}, \dots\right\}$$

Il rapporto tra due coefficienti di potenze successive di z^{-4} tende a $10\sqrt[4]{500} \approx 47.28708$.