LA MISURA DEL CERCHIO

Archimede di Siracusa

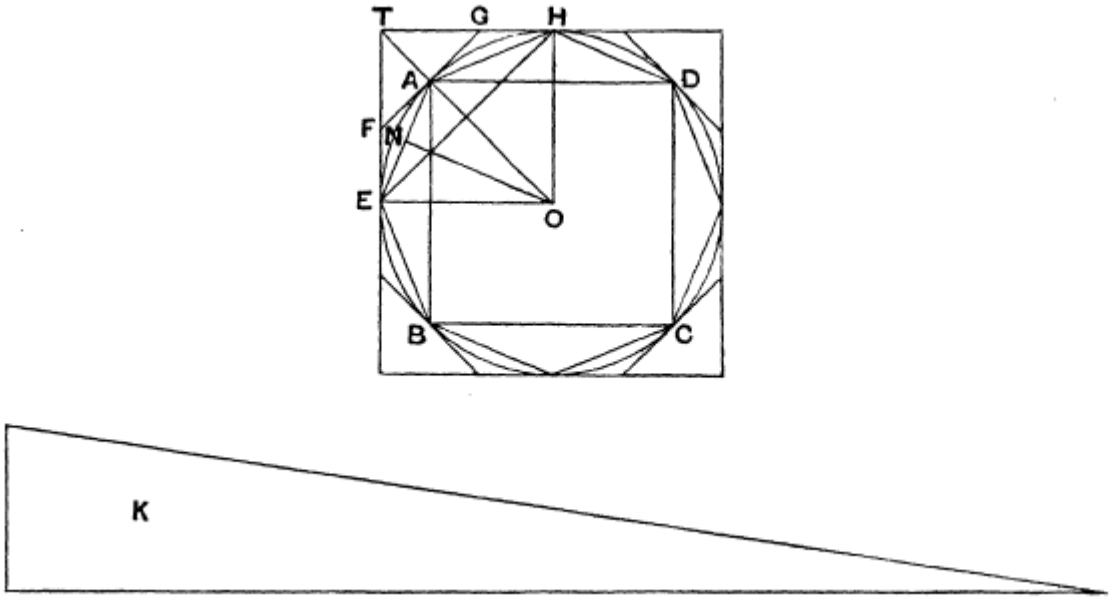
Basato sulla traduzione di T. L. Heath (1897) a cura di C. Suriano (2018)

La cosiddetta tomba di Archimede a Siracusa

LA MISURA DEL CERCHIO

Proposizione 1.

L'area di un cerchio qualsiasi è uguale a quella di un triangolo rettangolo nel quale uno dei cateti è uguale al raggio e l'altro alla circonferenza del cerchio.



Sia ABCD il cerchio dato, K il triangolo descritto.

Allora, se il cerchio non è uguale a K deve essere o maggiore o minore.

I. Supponiamo che il cerchio sia maggiore di K.

Inscriviamo un quadrato ABCD, bisechiamo gli archi AB, BC, CD, DA, poi bisechiamo le metà e così via fino a che i lati del poligono inscritto i cui vertici sono i punti di divisione e sottendono segmenti la cui somma sia inferiore all'eccesso dell'area del cerchio rispetto a K.

Allora l'area del poligono è maggiore di K[1].

Sia AE un suo[2] lato qualsiasi e ON la perpendicolare su AE condotta dal centro O.

Allora ON è minore del raggio del cerchio e pertanto inferiore a uno dei cateti sull'angolo retto in K. Inoltre il perimetro del poligono è minore della circonferenza del cerchio, ovvero minore dell'altro cateto sull'angolo retto in K.

Di conseguenza l'area del poligono è minore[3] di K; che è inconsistente con l'ipotesi.

Pertanto l'area del cerchio non è superiore a K.

II. Supponiamo che il cerchio sia minore di K.

---

[1] Se γ è l'area del cerchio e K quella del triangolo, per ipotesi $\gamma > K$. Se Σ è la somma dei segmenti circolari abbiamo $\Sigma < \gamma - K$, se poi Π è l'area del poligono inscritto vale $\Sigma = \gamma - \Pi$ per cui $\Pi > K$.

[2] Del poligono inscritto.

[3] In quanto prodotto di due termini entrambi inferiori ai fattori che determinano l'area di K.

Circoscriviamo un quadrato ABCD, facendo sì che due lati adiacenti che toccano il cerghio in E, H si incontrino in T. Bisechiamo gli archi tra punti di contatto adiacenti e tracciamo le tangenti ai punti di bisezione. Sia A il punto medio dell'arco EH e FAG la tangente ad A.

Allora l'angolo TAG è un angolo retto.

Quindi[4] TG>GA e >GH

Segue che il triangolo FTG è maggiore[5] di metà dell'area TEAH.

Analogamente, se si biseca l'arco AH e si traccia la tangente al punto di bisezione, dall'area GAH si rimuove più della metà[6].

In tal modo, continuando questo processo giungeremo infine ad un poligono circoscritto tale che gli spazi intercettati tra esso ed il cerchio sono tutti assieme inferiori all'eccesso di K rispetto all'area del cerchio[7].

Allora l'area del poligono è minore di K[8].

Ora, dal momento che la perpendicolare da O a un qualunque lato del poligono è uguale al raggio del cerchio, mentre il perimetro del poligono è maggiore della circonferenza del cerchio segue che l'area del poligono è maggiore[9] del triangolo K; che è impossibile.

Pertanto l'area del cerchio non è inferiore a K.

Allora dal momento che l'area del cerchio non è né maggiore né minore di K, deve essere uguale ad esso.

Proposizione 2.

L'area del cerchio sta al quadrato sul suo diametro come[10] *11 sta a 14.*

[Si tratta di una proposizione molto probabilmente spuria, in quanto derivabile dal risultato della proposizione successiva].

Proposizione 3.

Il rapporto della circonferenza di un cerchio qualunque rispetto al suo diametro è inferiore a 3+1/7 *ma superiore a* 3+10/71[11].

I. Sia AB il diametro di un cerchio, O il suo centro, AC la tangente in A; sia l'angolo AOC un terzo[12] di un angolo retto.

---

[4] In quanto, rispettivamente, ipotenusa rispetto a un cateto e per il fatto che TH<2TG ossia TG+GH<TG+TG.

[5] Ossia l'atra di FTG è maggiore dell'area di TAH, dal momento che l'area TAG è maggiore dell'area GAH perché la prima è la metà del prodotto di TG per la sua altezza e la seconda metà del prodotto di HG (inferiore a TG) per la stessa altezza.

[6] Perché l'arco AH è interno rispetto alla tangente.

[7] Se Ξ è la somma di questi segmenti compresi tra il poligono circoscritto ed il cerchio, abbiamo $\Xi < K-\gamma$.

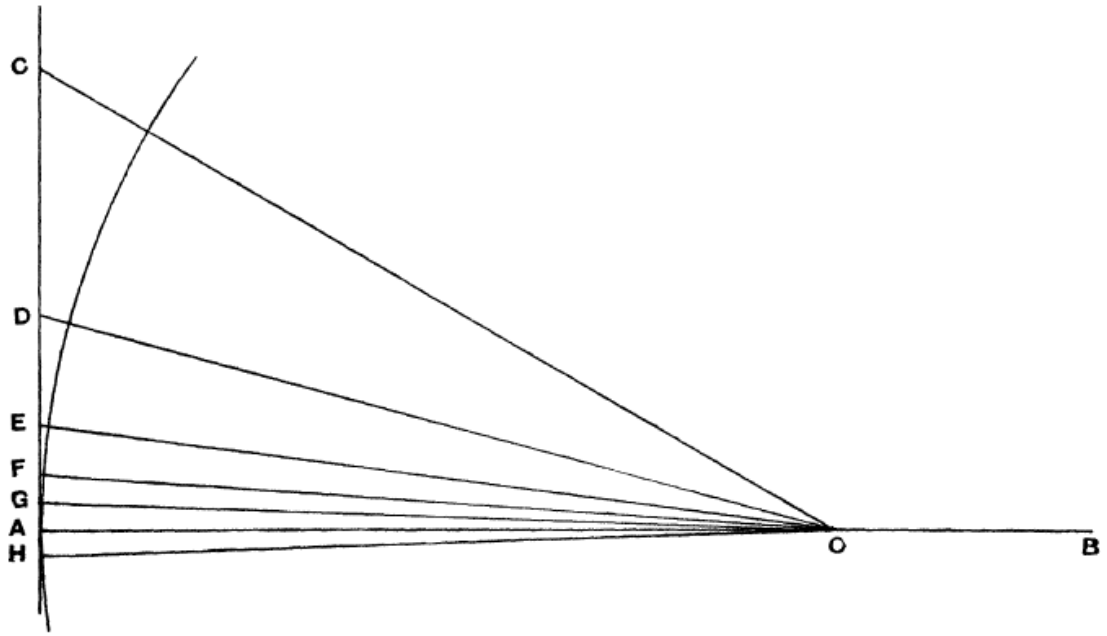
[8] Se γ è l'area del cerchio e K quella del triangolo, per ipotesi $\gamma<K$. Se Ψ è l'area del poligono circoscritto vale $\Psi = \gamma+\Xi$ per cui otteniamo $\Psi < K$.

[9] In quanto prodotto di due termini di cui uno uguale e l'altro maggiore rispetto ai fattori che determinano l'area di K.

[10] Vale a dire che vale approssimativamente la proporzione π :4=11:14.

[11] L'eccesso di tale rapporto, che è π, rispetto a 3 è compreso tra 10/71 e 10/70 ovvero tra 0.140845_+ e 0.142857_+ . Questa forbice vale 1/497 e sarà migliorata solo quasi venti secoli dopo nella cultura occidentale.

[12] La scelta di un angolo di 30° è dovuta al fatto che il suo seno vale 1/2, il coseno √3/2 e la tangente 1/√3 . Ora Archimede è in possesso di una approssimazione per difetto e una per eccesso di √3 pari rispettivamente a 265/153 e 1351/780. Infatti abbiamo 1.73202614379085 < √3 < 1.732051282051282 la differenza tra i due numeri razionali è 1/39780, il che è veramente notevole; l'ampiezza dell'incertezza è di $2.5\cdot10^{-5}$. Sul metodo che il Siracusano può aver impiegato per giungere al risultato rimando all'analisi riportata da T. L. Heath nella sua Introduzione (cap. IV, par. 7) ai



Allora[13] OA:AC>265:153 [a]
OC:CA=306:153 [b]

Innanzitutto tracciamo OD che biseca l'angolo AOC e che intercetta AC in D.

Ora[14] CO:OA=CD:DA

di modo che[15] (CO+OA):CA=OA:AD

Pertanto[16] OA:AD>571:153 [c]

Da qui[17] $OD^2:AD^2>349450:23409$

Di modo che[18] OD:DA>(591+1/8):153 [d]

In secondo luogo tracciamo OE che biseca l'angolo AOD e che intercetta AD in E.

"Lavori di Archimede" del 1897. Esso si basa sostanzialmente sulla ripetuta applicazione del fatto, noto ad Erone, che $n \pm \frac{1}{2n \pm 1} < \sqrt{n^2 \pm 1} < n \pm \frac{1}{2n}$ dove il valore iniziale di n=2 per giungere al fatto che:

$$\frac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{51}\right) < \sqrt{3} < \frac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{52}\right)$$

[13] OA:AC è la tangente, OC:CA la cosecante di 60°. Viene usata la minorante per √3 di cui alla nota 12.

[14] È la proposizione 3 del VI libro degli Elementi di Euclide, ossia "*Se un angolo di un triangolo viene diviso a metà e la linea retta che divide l'angolo divide anche la base, allora i segmenti della base avranno lo stesso rapporto dei rimanenti lati del triangolo*".

[15] Componendo gli antecedenti e poi permutando i medi.

[16] Da [a] e [b].

[17] $OD^2=OA^2+AD^2$ per Pitagora.

[18] La parte frazionaria della radice, pari a $.142_+$ viene minorata da 1/8=0.125.

Allora[19] OA:AE>(1162+1/8):153 [e]

E così[20] OE:EA>(1172+1/8):153 [f].

In terzo luogo tracciamo OF che biseca l'angolo AOE e che intercetta AE in F.

Otteniamo il fatto che[21] OA:AF>(2334+1/4):153 [g]

E così[22] OF:FA>(2339+1/4):153 [h].

In quarto luogo tracciamo OG che biseca l'angolo AOF e che intercetta AF in G.

Abbiamo allora[23] OA:AG>(4673+1/2):153 [i]

Ora l'angolo AOC che è un terzo dell'angolo retto, è stato bisecato quattro volte, ne segue che angolo AOG = 1/48 angolo retto.

Formiamo un angolo AOH dall'altra parte di OA uguale all'angolo AOG ed il prolungamento di GA intersechi OH in H.
Allora angolo AOG = 1/24 angolo retto.
Così GH è il lato di un poligono regolare di 96 lati circoscritto alla circonferenza data[24].
E dal momento che OA:AG>(4673+1/2):153
mentre AB=2OA, GH=2AG,

segue che[25] AB: perimetro del poligono di 96 lati>>(4673+1/2):14688.

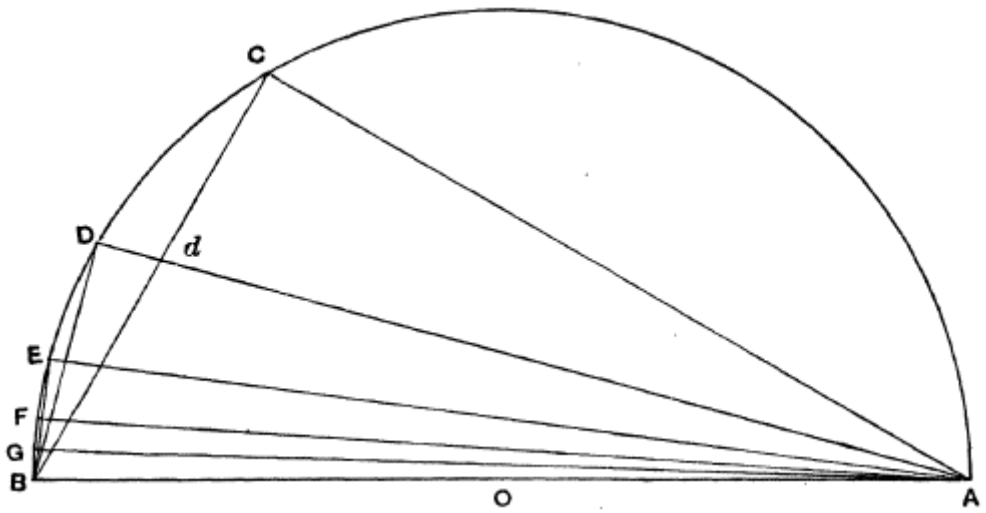
Ma[26] 14688/(4673+1/2) = 3+(667+1/2) : (4673+1/2)<3+1/7

Quindi la circonferenza del cerchio, essendo minore del perimetro del poligono, è a maggior ragione minore di 3+1/7 volte il diametro AB.

II. Sia dopo AB il diametro di un cerchio e AC, che intercetta il cerchio in C, faccia un angolo CAB uguale a un terzo di un angolo retto. Si tracci BC.

---

[19] Si ripete lo stesso procedimento visto nella prima bisezione, quindi DO:OA=DE:EA e componendo e permutandosi ottiene quanto esposto.
[20] Di nuovo si usa il teorema di Pitagora e si estrae la radice quadrata del rapporto.
[21] Si ripete lo stesso procedimento visto nella prima bisezione, quindi EO:OA=EF:FA e componendo e permutandosi ottiene quanto esposto.
[22] La corrispondenza è tra le formule [d], [f], [h].
[23] Si ripete lo stesso procedimento visto nella prima bisezione, quindi FO:OA=FG:GA e componendo e permutandosi ottiene quanto esposto.
[24] Siamo partiti dal poligono di 6 lati; dopo la prima bisezione ne abbiamo ottenuto uno di 12, dopo la seconda di 24, dopo la terza di 48 e dopo la quarta appunto di 96.
[25] 14888=153·96.
[26] Il denominatore 4673+1/2 viene minorato da 4672+1/2.



Allora[27] AC:CB<1351:780

Innanzitutto tracciamo AD che biseca l'angolo BAC e che intercetta BC in *d* e la circonferenza in D. Si tracci BD.

Allora angolo BAD= angolo *d*AC
= angolo *d*BD

gli angoli in D e C sono entrambi retti. Segue che i triangoli ADB, BD*d* sono simili[28].

Quindi[29] AD:DB=BD:D*d*
=AB:B*d*
=(AB+AC): (B*d*+C*d*)
=(AB+AC): BC

Ovvero (BA+AC):BC=AD:DB.

Quindi[30] AD:DB<2911:780 [α]

Così[31] AB:BD<(3013+3/4):780 [β]

In secondo luogo tracciamo AE che biseca l'angolo BAD e che intercetta la circonferenza in E. Si tracci BE.

Si vede allora, alla stessa maniera appena vista, che

AE:EB<(5924+3/4):780
=(5924+3/4)·4/13:780·4/13

[27] AC: CB è la tangente di 60°. Viene usata la maggiorante per √3 di cui alla nota 12.
[28] Come pure AC*d*.
[29] Perché BD:D*d*=AC:C*d* edi nuovo per la proposizione 3.VI di Euclide.
[30] AC:CB<1351:780, mentre BA:BC=2:1=1560:780 e poi si compone.
[31] Stesso procedimento del caso I: si quadra e si compone, usando quindi Pitagora.

$<1823:240$ [γ]

Così[32] $AB:BE<(1838+9/11):240$ [δ]

In terzo luogo tracciamo AF che biseca l'angolo BAE e che intercetta la circonferenza in F.

Allora

$$AF:FB<(5924+3/4):780$$
$$=(3661+9/11)\cdot 11/40:240\cdot 11/40$$
$$<1007:66 \qquad [\varepsilon]$$

Quindi[33] $AB:BF<(1009+1/6):66$ [ζ]

In quarto luogo tracciamo AG che biseca l'angolo BAF e che intercetta la circonferenza in G.

Allora

$$AG:GB<(2016+1/6):66 \qquad [\theta]$$

Quindi[34] $AB:BG<(2017+1/4):66$

dal che $BG:AB> 66: (2017+1/4):$ [ι]

Ora BG è il lato del poligono regolare di 96 lati inscritto. Segue dalla [ι] che[35]

Perimetro del poligono: $AB>6336: (2017+1/4)$

e[36] $6336: (2017+1/4) > 3+10/71$.

Ancor più[37] la circonferenza del cerchio è maggiore di 3+10/71 volte il diametro.

Alla fine il rapporto della circonferenza rispetto al diametro è

$< 3+1/7$ ma $> 3+10/71$.

[32] Stesso procedimento del caso I: si quadra e si compone, usando quindi Pitagora.
[33] Stesso procedimento del caso I: si quadra e si compone, usando quindi Pitagora.
[34] Stesso procedimento del caso I: si quadra e si compone, usando quindi Pitagora.
[35] $6336=96\cdot 66$.
[36] $6336: (2017+1/4) = 3+1137/8069$. La parte fratta è minorata da $1136/8069=1136\cdot 71/8069\cdot 71=80727/8069\cdot 71 <80690/8069\cdot 71=10/71$.
[37] In quanto maggiore del perimetro del poligono inscritto.