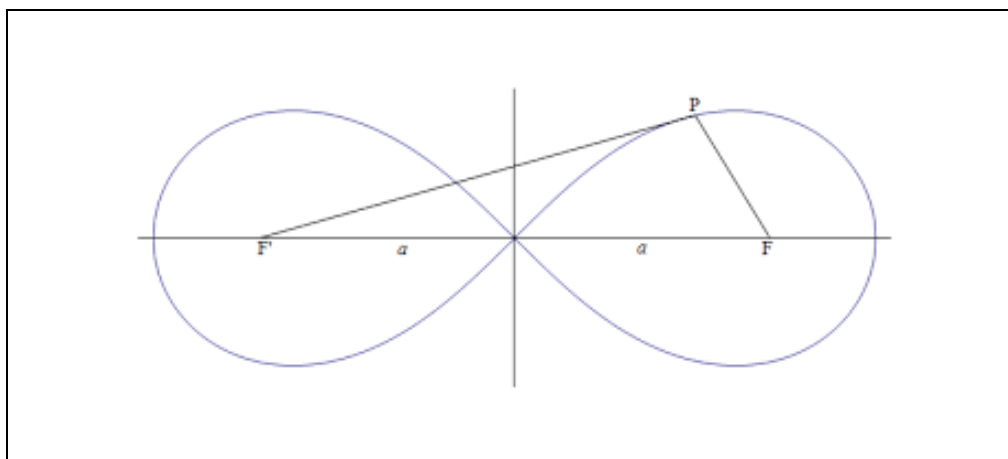


# UN'INTRODUZIONE ALGEBRICA ALLE FUNZIONI ELLITTICHE

Carmine Suriano





*Al nostro caro tesoro*

*Antonio*



## UN'INTRODUZIONE ALGEBRICA ALLE FUNZIONI ELLITTICHE

di Carmine Suriano

### INDICE

1. <i>Sistema di equazioni differenziali</i> .....	5
2. <i>Formule pitagoriche</i> .....	5
3. <i>Equazioni differenziali del primo ordine</i> .....	7
4. <i>Integrali ellittici</i> .....	8
5. <i>Equazioni differenziali del secondo ordine</i> .....	8
6. <i>Derivate successive e parità</i> .....	10
7. <i>Formule di riduzione</i> .....	12
8. <i>Formule di duplicazione</i> . ....	14
9. <i>Formule di bisezione</i> . ....	15
10. <i>Zeri e periodi</i> . ....	16
11. <i>Doppia periodicità</i> . ....	20
12. <i>Teoria generale delle funzioni ellittiche</i> . ....	21
13. <i>Espressione esplicita dei periodi</i> . ....	22
14. <i>Primitive</i> . ....	26
15. <i>Altri integrali</i> . ....	27
16. <i>Integrali ellittici completi</i> .....	29
17. <i>Valori particolari del modulo <math>k</math></i> .....	35
18. <i>Variazioni del modulo <math>k</math></i> .....	37
19. <i>Funzioni inverse</i> . ....	40
20. <i>Formulazione matriciale</i> . ....	41
21. <i>Un'applicazione: la lemniscata</i> .....	44
22. <i>Note storiche</i> .....	48
23. <i>Appendice</i> .....	50
24. <i>Altre letture</i> .....	56

## Introduzione

Nel presente lavoro il tema della classe speciale delle funzioni ellittiche di Jacobi viene affrontato in una maniera del tutto particolare e da un punto di vista semplice ed unitario. Ricorrendo alla tecnica dell'inversione, che ha consentito di fare una chiarezza determinante nello studio di quelle funzioni, viene introdotto sin dal principio un sistema di equazioni differenziali in tre incognite. Sulla sola base delle relazioni espresse nel dato sistema vengono fatte discendere e spiegate tutte le proprietà di quelle tre funzioni che altro non sono che le funzioni seno, coseno e delta amplitudine.

La forma che hanno le tre equazioni viene così assunta come l'origine e non come la conseguenza dell'esistenza di funzioni dalla doppia periodicità, proprietà che viene invece ricavata dal sistema originario con un approccio puramente analitico e non funzionale. A partire dal sistema stesso di equazioni seguono i teoremi di addizione, la parità, e vengono inoltre determinate le primitive e introdotte le funzioni inverse.

Un rapidissimo accenno viene fatto alla possibilità di adottare una formulazione matriciale per lo studio in questione. Anzi, il ricorso all'eleganza e alla concisione della notazione matriciale viene introdotta ogni volta se ne intraveda la possibilità e l'indubbia semplificazione.

Una brevissima rassegna dello sviluppo storico della teoria degli integrali e delle funzioni ellittiche chiude il lavoro.

## INTRODUZIONE ALLE FUNZIONI ELLITTICHE

---

### 1. Sistema di equazioni differenziali

---

Sia dato il sistema di equazioni differenziali nelle tre funzioni incognite  $x(u)$ ,  $y(u)$ ,  $z(u)$  rispetto alla variabile indipendente  $u$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{du} = yz \\ \frac{dy}{du} = -xz \\ \frac{dz}{du} = -k^2 xy \end{cases} \quad [1]$$

associato alle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases} \quad [2]$$

il parametro  $0 \leq k^2 \leq 1$  è detto modulo del sistema.

Il valore delle derivate, calcolato nell'origine, si ottiene immediatamente inserendo le [2] nelle equazioni di partenza [1]:

$$\begin{cases} x'(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ z'(0) = 0 \end{cases} \quad [3]$$

### 2. Formule pitagoriche

---

Dividendo membro a membro le prime due delle relazioni [1] si ha:

$$\frac{x'}{y'} = -\frac{y}{x}$$

quindi

$$xx' = -yy'$$

$$(x^2)' = -(y^2)'$$

integrando, e valutando la costante in base ai valori [2]:

$$x^2(\mathbf{u}) + y^2(\mathbf{u}) = \mathbf{1} \quad [4]$$

Analogamente, dividendo la prima e la terza delle [1]:

$$\frac{x'}{z'} = -\frac{1}{k^2} \frac{z}{x}$$

quindi

$$k^2 x x' = -z z'$$

$$k^2 (x^2)' = -(z^2)'$$

integrando, e valutando la costante in base ai valori [2]:

$$k^2 x^2(\mathbf{u}) + z^2(\mathbf{u}) = \mathbf{1} \quad [5]$$

Il rapporto tra la seconda e la terza delle [1] dà:

$$\frac{y'}{z'} = \frac{1}{k^2} \frac{z}{y}$$

quindi

$$k^2 y y' = z z'$$

$$k^2 (y^2)' = (z^2)'$$

integrando, e valutando la costante in base ai valori [2]:

$$z^2(\mathbf{u}) - k^2 y^2(\mathbf{u}) = \mathbf{1} - k^2 = k_1^2 \quad [6]$$

avendo definito il modulo complementare  $k_1$  attraverso la relazione:

$$k^2 + k_1^2 = 1 \quad [7]$$

si trova infine, sommando membro a membro le [4], [5] e [6], che valgono le seguenti formule:

$$(1+k^2) x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$x^2 + (1-k^2) y^2 + z^2 = 2 - k^2$$

Le relazioni testè ottenute sono dette, ovviamente, pitagoriche.

Relazioni analoghe sussistono anche per le derivate prime.

Elevando al quadrato le [1] e sommandole membro a membro si ha:

$$(x')^2 + (y')^2 = y^2 z^2 + x^2 z^2 = z^2 = 2 - (1+k^2) x^2 - y^2 \quad [8]$$

$$k^2 (x')^2 + (z')^2 = k^2 y^2 z^2 + k^4 x^2 y^2 = k^2 y^2 = z^2 - 1 + k^2 \quad [9]$$

$$(z')^2 - k^2 (y')^2 = k^4 x^2 y^2 - k^2 x^2 z^2 = k^2 x^2 (k^2 y^2 - z^2) = k^2(k^2 - 1) x^2 = (k^2-1)(1-z^2) \quad [10]$$

### ***3. Equazioni differenziali del primo ordine***

---

Ricaviamo delle equazioni differenziali alle quali soddisfa ciascuna delle funzioni in esame.

Elevando al quadrato la prima delle [1] ed utilizzando le relazioni pitagoriche per eliminare le funzioni  $y$  e  $z$  si ha

$$(x')^2 = y^2 z^2 = (1 - x^2) (1 - k^2 x^2)$$

cioé

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)} \quad [11]$$

Effettuando le stesse operazioni sulla seconda delle [1] otteniamo, similmente:

$$(y')^2 = x^2 z^2 = (1 - y^2) (k_1^2 + k^2 y^2)$$

cioé

$$\frac{dy}{du} = \sqrt{(1 - y^2)(k_1^2 + k^2 y^2)} \quad [12]$$

Ed infine, dalle terza delle [1], con uguale meccanismo:

$$(z')^2 = k^4 x^2 y^2 = (1 - z^2) (z^2 - k_1^2)$$

cioé

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{(1 - z^2)(z^2 - k_1^2)} \quad [13]$$

Le [11], [12] e [13] sono tre equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti che, assieme alle condizioni iniziali [2] definiscono, in maniera equivalente alle [1] le tre funzioni  $x(u)$ ,  $y(u)$ ,  $z(u)$ . Si noti che esse sono della forma

$$P(f, f') = 0$$

dove  $P$  è un polinomio, ovvero una funzione algebrica intera, a coefficienti costanti nelle variabili  $f$  ed  $f'$ . Questo è un risultato valido in generale nell'ambito della teoria delle funzioni che stiamo trattando.

#### 4. Integrali ellittici

---

In virtù delle relazioni pitagoriche è possibile concentrare la nostra attenzione sulla sola funzione  $x(u)$  per gli scopi della presente sezione.

Dalla [11] si ha, equivalentemente:

$$du = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

cioè

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad [14]$$

Tale rappresentazione integrale, a causa della presenza del polinomio irriducibile di quarto grado al denominatore sotto il segno di radice, integrale detto ellittico, dà ragione del nome di **funzione ellittica** dato ad  $x(u)$  e conseguentemente ad  $y(u)$  e  $z(u)$ .

#### 5. Equazioni differenziali del secondo ordine

---

Partendo da ciascuna delle [1] si possono ricavare delle equazioni differenziali del secondo ordine, mediante derivazione e successivo utilizzo delle relazioni pitagoriche:

$$x'' = y'z + yz' = -xz^2 - k^2xy^2 = -x(z^2 + k^2y^2) = -x(1 - k^2x^2 + k^2 - k^2x^2)$$



ovvero

$$\frac{d^2x}{du^2} = -x(1 + k^2 - 2k^2x^2) \quad [15]$$

Ancora:

$$y'' = -x'z - xz' = -yz^2 + k^2x^2y = -y(z^2 - k^2x^2) = -y(1 - k^2 + k^2y^2 - k^2 + k^2y^2)$$

ovvero

$$\frac{d^2y}{du^2} = -y(1 - 2k^2 + 2k^2y^2) \quad [16]$$

ed infine

$$z'' = -k^2(x'y + xy') = -k^2(zy^2 - zx^2) = -k^2z(y^2 - x^2) = -z(z^2 - 1 + k^2 - 1 + z^2)$$

ovvero

$$\frac{d^2z}{du^2} = -z(k^2 - 2 + 2z^2) \quad [17]$$

alle quali si associano i valori nell'origine:

$$\begin{cases} x''(0) = 0 \\ y''(0) = -1 \\ z''(0) = -k^2 \end{cases} \quad [18]$$

Moltiplichiamo la [15] per  $y$  e la [16] per  $x$  e sottraiamo membro a membro:

$$x''y - y''x = -xy(1 + k^2 - 2k^2x^2 - 1 + 2k^2 - 2k^2y^2) = -k^2xy = z'$$

così pure, moltiplicando la [15] per  $z$  e la [17] per  $x$  e sottraendo:

$$x''z - z''x = -xz(1 + k^2 - 2k^2x^2 + 2 - k^2 - 2z^2) = -xz = y'$$

ed infine, moltiplicando la [16] per  $z$  e la [17] per  $y$  e sottraendo:

$$y''z - z''y = -yz(1 - 2k^2 + 2k^2y^2 + 2 - k^2 - 2z^2) = -(1 - k^2)yz = (k^2 - 1)x'$$

Il metodo appena visto si può continuare ad applicare per calcolare le derivate successive ed ottenere quindi i termini degli sviluppi in serie di McLaurin. Omettendo i passaggi, si ha ad esempio :

$$\begin{aligned}x''' &= -x' (1+k^2-6k^2x^2) \\ y''' &= -y' (1-2k^2+6k^2y^2) \\ z''' &= -z' (k^2-2+6z^2)\end{aligned}$$

## 6. Derivate successive e parità

---

E' possibile derivare ancora le relazioni [15], [16] e [17] per ottenere le espressioni delle derivate di ordine superiore ed i loro valori nell'origine. Vediamo il comportamento generale.

Ciascuna delle equazioni viste nella sez. 5 è della forma

$$f'' = f(A + Bf^2) \tag{19}$$

con

$$A_x + A_y + A_z = 0$$

(il pedice indica la funzione alla quale è relativa il coefficiente  $A$ )

e

$$B_x + B_y + B_z = -2$$

le costanti  $A$  e  $B$  dipendono da  $k^2$  ma non dalla variabile  $u$  nè da alcuna della stesse  $f$  (che è di volta in volta  $x, y, z$ ).

Derivando sempre rispetto ad  $u$  si ha:

$$f''' = f'(A+Bf^2) + 2Bf^2 f' = f'(A+3Bf^2) = f'(A + Cf^2) \tag{20}$$

la derivata terza è funzione della sola derivata prima. Ancora:

$$f^{iv} = f''(A+Cf^2) + 2Cf(f')^2$$

ma ognuna delle espressioni  $(f')^2$  è, come visto nella sez. 3, del tipo

$$(f')^2 = (1-f^2)(D+Ef^2)$$

e quindi

$$f^{iv} = f''(A+Cf^2) + 2Cf(1-f^2)(D+Ef^2)$$

invertendo la [19] si può dire che l'ultimo prodotto si scrive nella forma

$$2Cf(1-f^2)(D+Ef^2) = f''(P+Rf^2) + Sf^2$$

e quindi che

$$f^{iv} = f''(A+Cf^2) + f''(P+Rf^2) + Sf^2 = f''(G+Hf^2) + Sf^2$$

La derivata quarta è funzione della sola derivata seconda.

I risultati testè ottenuti si possono generalizzare per semplice induzione come segue.

Ripartiamo dalle equazioni [1] che riscriviamo nel seguente modo:

$$f' = h_1 h_2 \tag{21}$$

dove  $f$  è una delle tre funzioni  $x, y, z$  e le  $h_i$  sono le altre due, diverse da  $f$ .

Deriviamo la [21] più volte: otteniamo, in sequenza, omettendo per comodità di notazione di scrivere gli indici per le funzioni  $h$ :

$$f'' = \sum h' h$$

$$f''' = \sum h'' h + 2 \sum h' h'$$

$$f^{iv} = \sum h''' h + 3 \sum h'' h'$$

$$f^v = \sum h^{iv} h + 4 \sum h''' h' + 3 \sum h'' h''$$

$$f^{vi} = \sum h^v h + 5 \sum h^{iv} h' + 7 \sum h''' h''$$

e così via:

$$f^{(n)} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} [a_{k,n} \sum h^{(n-k)} h^{(k-1)}] \tag{22}$$

si ottiene una sommatoria di prodotti di derivate di ordine inferiore, tali che la somma degli indici di derivazione è, per ciascun prodotto, pari all'indice della derivata a primo membro diminuito di 1.

Nella [22] il simbolo  $[x]$  indica la parte intera di  $x$ , e le  $a_{k,n}$  sono così definite per ricorrenza:

$$a_{k,n} = a_{k,n-1} + a_{k-1,n-1}$$

Calcolando tutti i valori nello zero, si vede, per ricorrenza, che le derivate di ordine pari della funzione  $x$  sono tutte nulle, mentre sono non nulle le derivate di ordine dispari; per converso le derivate di ordine dispari delle funzioni  $y$  e  $z$  sono tutte nulle, mentre sono non nulle le derivate di ordine pari:

$$x^{(2n+1)}(0) \neq 0 \quad \text{e} \quad x^{(2n)}(0) = 0$$

esattamente l'opposto accade per le funzioni  $y, z$ :

$$y^{(2n+1)}(0) = z^{(2n+1)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad y^{(2n)}(0) = z^{(2n)}(0) \neq 0$$

Varranno perciò, nell'intorno dell'origine, i seguenti sviluppi in serie di potenze:

$$\begin{aligned} x(u) &= u + \frac{1}{3!} f''' u^3 + \frac{1}{3!} f^{iv} u^5 + \dots \\ y(u) &= 1 - \frac{1}{2!} f'' u^2 + \frac{1}{4!} f^{iv} u^4 + \dots \\ z(u) &= 1 - \frac{k^2}{2!} u^2 + \frac{1}{4!} f^{iv} u^4 + \dots \end{aligned} \quad [23]$$

che mostrano il seguente comportamento, valido in virtù del prolungamento analitico:  $x(u)$  è una funzione dispari,  $y(u)$  e  $z(u)$  sono funzioni pari della variabile  $u$ :

$$\begin{cases} x(u) = -x(-u) \\ y(u) = y(-u) \\ z(u) = z(-u) \end{cases} \quad [24]$$

## 7. Formule di riduzione

---

Nella sezione 3 abbiamo visto che ognuna delle tre funzioni ellittiche (che diciamo  $f$ ) soddisfa una equazione algebrica a coefficienti costanti nelle variabili  $f$  ed  $f'$  per di più lineare rispetto alla derivata prima. In virtù di questo fatto, è possibile esprimere  $f(u+v)$  in funzione di  $f(u)$  ed  $f(v)$  come segue.

Definiamo delle nuove funzioni della variabile  $u$  che dipendono parametricamente dal parametro  $v$ :

$$\begin{aligned} f(u) &= x(u) x(u+v) \\ g(u) &= y(u) y(u+v) \end{aligned}$$

$$h(u) = z(u) z(u+v)$$

ove  $f(0)=0$ ,  $g(0)=y(v)$  ed  $h(0)=z(v)$ . Determiniamo quindi dei numeri  $A, B, C, D$  indipendenti dalla nostra variabile  $u$ , tali che sia:

$$\begin{aligned} g(u) + A f(u) &= C \\ h(u) + B f(u) &= D \end{aligned} \quad [25]$$

Ponendo  $u=0$  si ottiene immediatamente

$$\begin{aligned} y(v) &= C \\ z(v) &= D \end{aligned}$$

Derivando rispetto a  $u$  le [25] si ha:

$$y'(u) y(u+v) + y(u) y'(u+v) + A [x'(u) x(u+v) + x(u) x'(u+v)] = 0$$

$$z'(u) z(u+v) + z(u) z'(u+v) + B [x'(u) x(u+v) + x(u) x'(u+v)] = 0$$

ponendo in queste  $u=0$  per le [3] abbiamo:

$$\begin{aligned} y'(v) &= -A x(v) \\ z'(v) &= -B x(v) \end{aligned}$$

e, dalle [1]:

$$\begin{aligned} -x(v) z(v) &= -A x(v) \\ -k^2 x(v) y(v) &= -B x(v) \end{aligned}$$

col che:

$$\begin{aligned} A &= z(v) \\ B &= -k^2 y(v) \end{aligned}$$

Possiamo ora scrivere esplicitamente le [25]:

$$\begin{aligned} y(u) y(u+v) + z(u) x(u) x(u+v) &= y(v) \\ z(u) z(u+v) + k^2 y(v) x(u) x(u+v) &= z(v) \end{aligned} \quad [26]$$

Quelle appena scritte sono delle identità in  $u, v$  e possono essere pertanto riscritte cambiando  $u$  in  $-u$  e  $v$  in  $u+v$ . Sfruttando le condizioni di parità si ha pertanto:

$$\begin{cases} y(u)y(v) - z(u+v)x(u)x(v) = y(u+v) \\ z(u)z(v) - k^2 y(u+v)x(u)x(v) = z(u+v) \end{cases} \quad [27]$$

Quello appena ottenuto è un sistema di equazioni nelle incognite  $y(u+v)$  e  $z(u+v)$  che si risolve facilmente, ad esempio ricavando dalla seconda  $y(u+v)$ :

$$y(u+v) = \frac{z(u)z(v) - z(u+v)}{k^2 x(u)x(v)}$$

e sostituendola nella prima. Si ottiene quindi:

$$z(u+v) = \frac{z(u)z(v) - k^2 x(u)x(v)y(u)y(v)}{1 - k^2 x^2(u)x^2(v)} \quad [28]$$

che rappresenta la **formula di addizione** per la funzione  $z$ . Sostituendo tale valore nell'altra equazione si ha:

$$y(u+v) = \frac{y(u)y(v) - x(u)x(v)z(u)z(v)}{1 - k^2 x^2(u)x^2(v)} \quad [29]$$

che è la formula di addizione per la funzione  $y$ . Dalla prima delle [26] otteniamo infine il valore di  $x(u+v)$ :

$$x(u+v) = \frac{x(u)y(v)z(v) + x(v)y(u)z(u)}{1 - k^2 x^2(u)x^2(v)} \quad [30]$$

che esprime la formula di addizione per  $x$ . Sostituendo  $u$  con  $-u$  e tenendo presenti le condizioni di parità [24] si hanno ovviamente le formule di sottrazione.

## 8. Formule di duplicazione.

---

Le formule di addizione (o riduzione) testè ricavate consentono di dedurre le relazioni di duplicazione e bisezione, così come si fa per le funzioni trigonometriche.

Posto infatti  $u=v$  si ha:

$$x(2u) = \frac{2x(u)y(u)z(u)}{1 - k^2 x^4(u)} \quad [31.1]$$

$$y(2u) = \frac{y^2(u) - x^2(u)z^2(u)}{1 - k^2 x^4(u)} \quad [31.2]$$

$$z(2u) = \frac{z^2(u) - k^2 x^2(u)y^2(u)}{1 - k^2 x^4(u)} \quad [31.3]$$

ovvero, rendendo le formule omogenee rispetto alle funzioni  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$x(2u) = \frac{2x(u)\sqrt{[1-x^2(u)][1-k^2x^2(u)]}}{1-k^2x^4(u)} \quad [32.1]$$

$$y(2u) = \frac{2y^2(u)}{1-k^2[1-y^2(u)]^2} - 1 \quad [32.2]$$

$$z(2u) = \frac{2k^2z^2(u)}{k^2-[1-z^2(u)]^2} - 1 \quad [32.3]$$

## 9. Formule di bisezione.

---

Partendo dalle ultime identità ottenute, formiamo il seguente rapporto:

$$\frac{y(2u)+z(2u)}{1+z(2u)} = \left[ \frac{2y^2(u)-2z^2(u)}{1-k^2x^4(u)} - 2 \right] \frac{1-k^2x^4(u)}{2z^2(u)} = \frac{y^2(u)+z^2(u)-1+k^2x^4(u)}{z^2(u)} = y^2(u)$$

cioè, cambiando  $u$  in  $u/2$ :

$$y\left(\frac{u}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{y(u)+z(u)}{1+z(u)}} \quad [33.1]$$

per la relazione pitagorica fondamentale, inoltre:

$$x^2\left(\frac{u}{2}\right) = 1 - y^2\left(\frac{u}{2}\right) = 1 - \frac{y(u) + z(u)}{1 + z(u)}$$

cioè

$$x\left(\frac{u}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-y(u)}{1+z(u)}} \quad [33.2]$$

analogamente:

$$z^2\left(\frac{u}{2}\right) = 1 - k^2 x^2\left(\frac{u}{2}\right) = 1 - \frac{1 - z^2(u)}{1 - y^2(u)} \frac{1 - y(u)}{1 + z(u)} = \frac{1 + y(u) - 1 + z(u)}{1 + y(u)}$$

ovvero

$$z\left(\frac{u}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{y(u)+z(u)}{1+y(u)}} \quad [33.3]$$

Le [33] rappresentano le cosiddette formule di bisezione.

È notevole l'espressione della somma dei quadrati delle tre funzioni:

$$x^2\left(\frac{u}{2}\right) + y^2\left(\frac{u}{2}\right) + z^2\left(\frac{u}{2}\right) = 1 + \frac{y(u) + z(u)}{1 + y(u)} = \frac{1 + 2y(u) + z(u)}{1 + y(u)}$$

ovvero

$$x^2(u) + y^2(u) + z^2(u) = \frac{1 + 2y(2u) + z(2u)}{1 + y(2u)}$$

da confrontare con le relazioni pitagoriche del cap. 4 per cui, rinominando l'argomento,

$$\frac{1 + 2y(u) + z(u)}{1 + y(u)} + k^2 \frac{1 - y(u)}{1 + z(u)} = 2$$

Invece, usando  $u$  in luogo di  $u/2$ ,

$$x^2(u) + y^2(u) - z^2(u) = 1 + \frac{y(2u)+z(2u)}{1+y(2u)} = \frac{1-z(2u)}{1+y(2u)}$$

## 10. Zeri e periodi.

---

Indichiamo con  $a$  il primo zero della funzione  $z(u)$  in modo che sia  $z(a)=0$ . In virtù delle relazioni pitagoriche, le tre funzioni  $x, y, z$  non si annullano mai contemporaneamente, e si ha infatti:

$x(0)=0$	$x(a)=1/k$
$y(0)=1$	$y(a)=-ik_1/k$
$z(0)=1$	$z(a)=0$



Mediante le formule di riduzione possiamo calcolare i valori assunti nel punto  $u+a$ :

$$x(u+a) = \frac{x(u)y(a)z(a)+x(a)y(u)z(u)}{1-k^2x^2(u)x^2(a)} = \frac{y(u)z(u)}{k[1-x^2(u)]} = \frac{z(u)}{ky(u)}$$

$$y(u+a) = \frac{y(u)y(a)-x(u)x(a)z(u)z(a)}{ky^2(u)} = \frac{-ik_1y(u)}{ky^2(u)} = \frac{-ik_1}{ky(u)}$$

$$z(u+a) = \frac{z(u)z(a) - k^2x(u)x(a)y(u)y(a)}{ky^2(u)} = \frac{ik_1k^2x(u)}{k^2y(u)} = \frac{-ik_1x(u)}{y(u)}$$

possiamo calcolare ancora i valori in  $u+2a$ :

$$\begin{aligned} x(u+a+a) &= \frac{x(u+a)y(a)z(a)+x(a)y(u+a)z(u+a)}{1-k^2x^2(u+a)x^2(a)} = \frac{k_1^2x(u)}{k^2y^2(u)} \frac{k^2}{1-z^2(u)/y^2(u)} = \frac{k_1^2x(u)}{k^2y^2(u)-z^2(u)} \\ &= \frac{k_1^2x(u)}{1-k^2} = -x(u) \end{aligned}$$

$$y(u+a+a) = \frac{y(u+a)y(a) - x(u+a)x(a)z(u+a)z(a)}{ky^2(u)} = \frac{-i^2k_1^2/k^2y(u)}{ky^2(u)} = y(u)$$

$$z(u+a+a) = \frac{z(u+a)z(a) - k^2x(u+a)x(a)y(u+a)y(a)}{ky^2(u)}$$

$$= \frac{-k^2 \left[ \frac{z(u)}{ky(u)} \right] ik_1/[ky(u)]}{ky^2(u)} = -z(u)$$

riepilogando, otteniamo la seguente tabella:

$x(0)=0$	$x(a)=1/k$	$x(u+a)=z(u)/ky(u)$	$x(u+2a)=-x(u)$
$y(0)=1$	$y(a)=-i k_1/k$	$y(u+a)=-i k_1/ky(u)$	$y(u+2a)=y(u)$
$z(0)=1$	$z(a)=0$	$z(u+a)=i k_1x(u)/y(u)$	$z(u+2a)=-z(u)$

il che mostra che  $y(u)$  è una funzione periodica, con periodo  $2a$ :

$$y(u+2a) = y(u) \quad [34]$$

Indichiamo ora con  $b$  il primo zero della funzione  $y$ :  $y(b)=0$ . Abbiamo  $x(b)=1$  e  $z(b)=k_1$ .

Utilizziamo ancora le formule di riduzione:

$$x(u + b) = \frac{y(u)z(u)}{1-k^2x^2(u)} = \frac{y(u)z(u)}{z^2(u)} = \frac{y(u)}{z(u)}$$

$$y(u + b) = \frac{-x(u)z(u)k_1}{z^2(u)} = -k_1 \frac{-x(u)}{z(u)}$$

$$z(u + b) = \frac{z(u)k_1}{z^2(u)} = \frac{k_1}{z(u)}$$

possiamo calcolare ancora i valori in  $u+2b$ :

$$x(u + b + b) = \frac{\left[\frac{-k_1x(u)}{z(u)}\right]k_1/z(u)}{1-k^2y^2(u)/z^2(u)} = \frac{-k_1x(u)}{z^2(u)-k^2y^2(u)} = \frac{-k_1^2x(u)}{k_1^2} = -x(u)$$

$$y(u + b + b) = \frac{\left[\frac{-y(u)}{z(u)}\right][k_1/z(u)]k_1}{k_1^2/z^2(u)} = -y(u)$$

$$z(u + b + b) = \frac{[k_1/z(u)]k_1}{k_1^2/z^2(u)} = z(u)$$

riepilogando, otteniamo la seguente tabella:

$x(0)=0$	$x(b)= 1$	$x(u+b)= y(u)/z(u)$	$x(u+2b)= -x(u)$
$y(0)=1$	$y(b)= 0$	$y(u+b)= -k_1x(u)/z(u)$	$y(u+2b)= - y(u)$
$z(0)=1$	$z(b)= k_1$	$z(u+b)= k_1/z(u)$	$z(u+2b)= z(u)$

il che mostra che  $z(u)$  è una funzione periodica, con periodo  $2b$ :

$$z(u+2b) = z(u) \quad [35]$$

Sia ora  $c=2a-2b$ ; calcoliamo le nostre funzioni in  $u+c=u+2(a-b)$ :

$$x(u + c) = \frac{x(u+2a)y(2b)z(2b)+x(2b)y(u+2a)z(u+2a)}{1-k^2x^2(u+2a)x^2(2b)}$$

dalle formule di duplicazione:

$$x(2b) = \frac{x(2b)y(b)z(b)}{1-k^2x^4(b)} = 0$$

$$y(2b) = -1$$

$$z(2b) = 1$$

per cui

$$x(u+c) = -x(u+2a) = x(u)$$

il che mostra che  $x(u)$  è una funzione periodica, con periodo  $c=2a-2b$ :

$$x(u+c) = x(u) \quad [36]$$

Valutiamo anche  $y(u+c) = y(u+2a-2b)$ . Sempre sfruttando le condizioni di parità:

$$y(u+c) = y(u+2a)y(2b) + x(u+2a)x(2b)z(u+2a)z(2b) = y(u)(-1) = -y(u)$$

$$z(u+c) = z(u+2a)z(2b) + x(u+2a)x(2b)y(u+2a)y(2b) = z(u+2a)$$

e valutiamo pure

$$y(c) = y(2a)y(2b) + x(2a)x(2b)z(2a)z(2b) = -1$$

$$z(c) = z(2a)z(2b) + x(2a)x(2b)y(2a)y(2b) = -1$$

$$x(c) = 0$$

Calcoliamo ora i valori in corrispondenza del punto  $u+4b = u+d$ :

$$x(u+4b) = \frac{x(u+2b)y(2b)z(2b) + x(2b)y(u+4b)z(u+4b)}{1-k^2x^2(u+2b)x^2(2b)} = -x(u+2b) = x(u)$$

cioè  $x(u)$  è una funzione periodica, con periodo  $d=4b$ :

$$x(u+4b) = x(u) \quad [37]$$

Calcoliamo ancora

$$y(u+4b) = y(u+2b+2b) = y(u+2b) y(2b) - x(u+2b) x(2b) z(u+2b) z(2b) = -y(u)(-1) = y(u)$$

quindi  $4b$  è **periodo anche** per la funzione  $y(u)$ .

$$y(u+4b) = y(u) \tag{38}$$

Sia infine  $e = 4(a-b)$  e valutiamo

$$\begin{aligned} z(u+e) &= z[u+4(a-b)] = z[u+2(a-b)+2(a-b)] \\ &= \frac{z[u+2(a-b)]z[2(a-b)]-k^2x[u+2(a-b)]x[2(a-b)]y[u+2(a-b)]y[2(a-b)]}{1-k^2x^2[u+2(a-b)]x^2[2(a-b)]} = -z(u)(-1) = z(u) \end{aligned}$$

che mostra la periodicità di  $z$  con periodo  $e=4(a-b)$ :

$$z[u+4(a-b)] = z(u) \tag{39}$$

## 11. Doppia periodicità.

---

Riassumiamo i risultati ottenuti nella sezione precedente. Abbiamo trovato, per ciascuna funzione, due periodi:

	periodi	
$x(u)$	$2(a-b)$	$4b$
$y(u)$	$2a$	$4b$
$z(u)$	$2b$	$4(a-b)$

[40]

Se  $a$  fosse multiplo di  $b$ , fosse cioè  $a=mb$ , la tabella [40] si presenterebbe così:

	Periodi	
$x(u)$	$2(m-1)b$	$4b$
$y(u)$	$2mb$	$4b$
$z(u)$	$2b$	$4(m-1)b$

[41]

La consistenza del requisito di periodicità impedisce che  $m$  possa essere un numero pari maggiore di 2, perchè altrimenti  $x(u)$  avrebbe due periodi non multipli l'uno dell'altro. Così pure non può

essere  $m$  un numero dispari maggiore di 1, poichè in tal caso  $y(u)$  avrebbe due periodi non multipli l'uno dell'altro.

D'altronde non può essere  $m=0$  poichè ci sarebbe la funzione  $y(u)$  con un solo periodo e le altre con due periodi, in contraddizione con le equazioni [1]. Per la stessa ragione non può essere  $m=1$ . Non può essere infine  $m=2$  perchè allora tutte le funzioni avrebbero lo stesso periodo  $2b=a$ , il che è in contrasto con le formule di riduzione per l'argomento  $u+a$  viste in precedenza.

Analogamente si vede che non può essere  $b$  multiplo di  $a$  ( $b=na$ ) poichè in tal caso la tabella [40] si presenterebbe così:

	<b>periodi</b>	
$x(u)$	$2(1-n)a$	$4na$
$y(u)$	$2a$	$4na$
$z(u)$	$2na$	$4(1-n)a$

[42]

e, per le stesse ragioni già dette, non può essere  $n$  nè pari nè dispari nè nullo.

Non resta quindi che una sola possibilità: cioè che il rapporto tra  $a$  e  $b$  sia un numero complesso.

Giungiamo così a stabilire la proprietà fondamentale delle funzioni ellittiche, dedotta unicamente dal (e quindi equivalente al) sistema di equazioni differenziali [1]:

**le funzioni ellittiche  $x, y, z$  sono doppiamente periodiche, ed il rapporto tra i due periodi è un numero complesso.**

## 12. Teoria generale delle funzioni ellittiche.

---

I risultati ottenuti nella sezione precedente si possono generalizzare per includere una classe di funzioni più vasta rispetto a quelle definite dal sistema [1].

E' opportuno a tale scopo dare la seguente definizione:

si dice **ellittica** una funzione a valori complessi **con due periodi distinti**, il rapporto dei quali è un numero complesso:

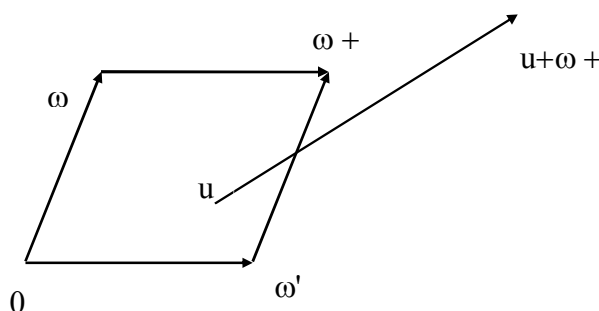
$$f(u + n\omega + m\omega') = f(u) \tag{43}$$

derivando  $n$  volte abbiamo:

$$f^{(n)}(u + n\omega + m\omega') = f^{(n)}(u) \tag{44}$$

le derivate di qualsiasi ordine di una funzione ellittica sono funzioni ellittiche aventi gli stessi periodi.

Nel piano complesso  $u = \omega_1 + i \omega_2$  tracciamo, a partire dall'origine, i due vettori rappresentativi dei numeri  $\omega$  ed  $\omega'$ . Essi non sono paralleli poichè il rapporto  $\omega/\omega'$  non è reale, come abbiamo già visto. Mediante tali vettori si può costruire un parallelogramma avente i vertici nell'origine, in  $\omega$ , in  $\omega'$  ed in  $\omega + \omega'$ . Tale parallelogramma è detto dei periodi poichè, al di fuori di esso, per la [43] la funzione  $f$  assume gli stessi valori che al suo interno, quando si sia operata una traslazione dal punto  $u$  al punto  $u + \omega + \omega'$  mediante combinazione lineare dei vettori di base  $\omega$  ed  $\omega'$ .



Dalla [43] è immediato verificare che la somma, la differenza, il prodotto ed il quoziente di due funzioni ellittiche aventi la stessa coppia di periodi, è ancora una funzione ellittica avente gli stessi periodi. L'insieme quindi delle funzioni ellittiche di periodi in  $\omega$  ed  $\omega'$  è un campo  $\mathbf{R}$ . Per la [44] inoltre  $\mathbf{R}$  è un campo differenziale.

Due funzioni  $f, g \in \mathbf{R}$  sono tali che esiste un polinomio  $P$  a coefficienti costanti tale che  $P(f, g) = 0$ . Oltre a ciò, una qualsiasi funzione  $f \in \mathbf{R}$  soddisfa una equazione algebrica del primo ordine, come abbiamo già visto nella sez. 3 del tipo:

$$R(f, f') = 0 \tag{45}$$

### 13. Espressione esplicita dei periodi.

---

Torniamo ad occuparci delle funzioni [1]. Nella sez. 4 abbiamo visto la relazione che lega le funzioni  $x, y, z$  a particolari integrali ellittici. Guardando le [11], [12], [13] e per la [14] si vede che esse sono funzioni di  $u$  attraverso l'inversione di altrettanti integrali ellittici, invertendo per l'appunto la dipendenza di  $u$  da esse.

Per analogia con la questione dell'inversione dell'integrale

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1} x$$

che, invertito, dà la funzione

$$x = \sin(u)$$

si danno i seguenti nomi particolari (introdotti da Jacobi) alle nostre funzioni:

$$\begin{array}{ll} x(u) = \operatorname{sn}(u) & \text{seno amplitudine} \\ y(u) = \operatorname{cn}(u) & \text{coseno amplitudine} \\ z(u) = \operatorname{dn}(u) & \text{delta amplitudine} \end{array}$$

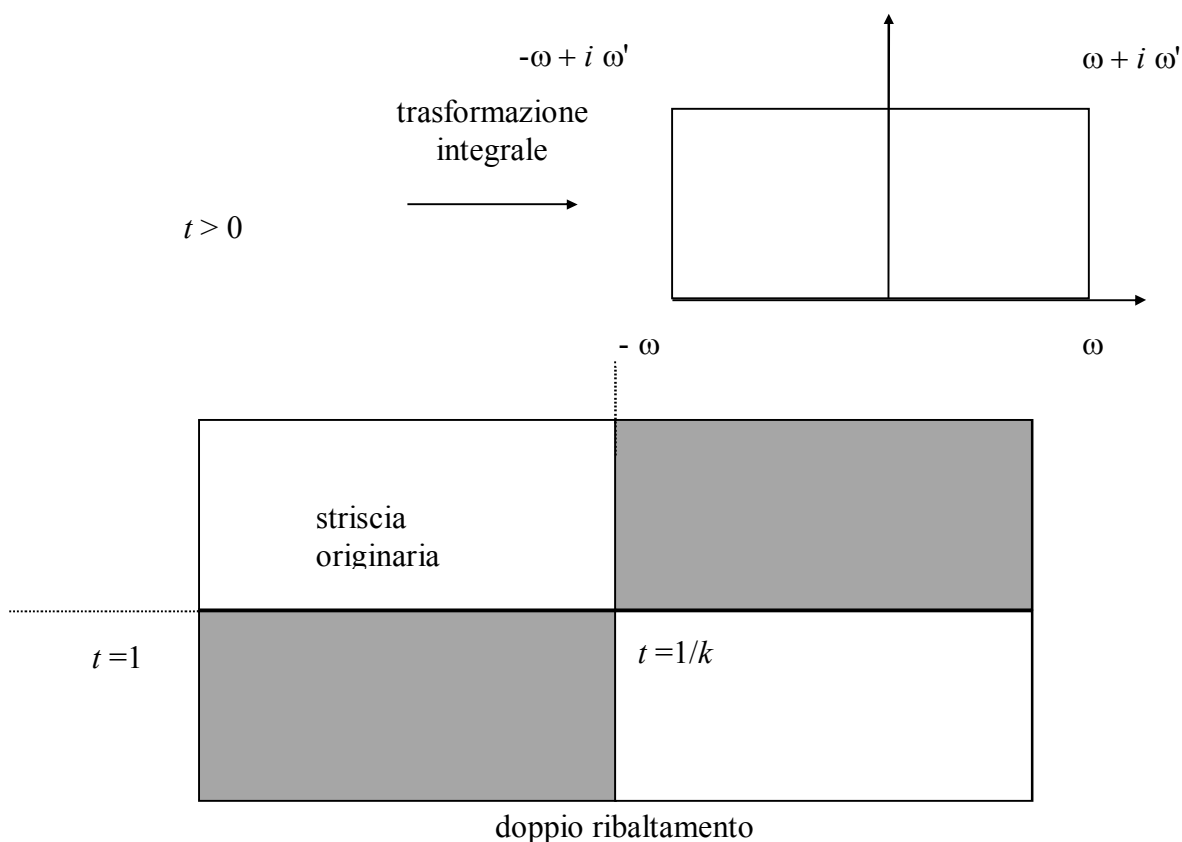
In particolare la relazione fondamentale [14] che qui riscriviamo:

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

realizza, pensando a  $t$  come variabile complessa, la trasformazione conforme del semipiano superiore delle  $t$  nel rettangolo delle  $u$  di coordinate

$$u_1 = -\omega \quad u_2 = \omega \quad u_3 = \omega + i\omega' \quad u_4 = -\omega + i\omega'$$

i cui lati sono quindi lunghi  $2\omega$  e  $\omega'$ .



Tale trasformazione ottiene la doppia periodicità mediante il ribaltamento del rettangolo due volte, rispetto alle ascisse ed alle ordinate, dei punti  $t=1$  e  $t=1/k$  per cui l'espressione esplicita dei periodi è:

$$4\omega = 4 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad [46]$$

$$2\omega' = 2i \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} \quad [47]$$

effettuando in quest'ultima il cambiamento di variabile

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-k_1^2s^2}}$$

l'integrale diventa:

$$2\omega' = 2i \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k_1^2s^2)}} \quad [48]$$

La [46] e la [48] rappresentano l'espressione esplicita dei periodi delle funzioni  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e permettono di calcolarne effettivamente gli zeri.

Tornando alle notazioni della sez. 11 abbiamo:

$$\begin{cases} 4b = 4\omega \\ 2(a-b) = 2\omega' \end{cases}$$

ovvero

$$\omega = b$$

$$\omega' = a - b$$

per cui gli zeri ed i periodi fondamentali sono:

funzione	periodi		zeri
$x$	$2 \omega'$	$4 \omega$	$2m\omega + 2n\omega'$
$y$	$2 (\omega + \omega')$	$4 \omega$	$(2m+1) \omega + 2n\omega'$
$z$	$4 \omega'$	$2 \omega$	$(2m+1) \omega + (2n+1) \omega'$



Le tre funzioni definite dal sistema [1] rappresentano quindi una classe ristretta, o meglio un sottoinsieme dell'insieme delle funzioni ellittiche come definite nella sez. [13]. In effetti il rapporto tra i loro due periodi non è un numero complesso qualsiasi, ma una funzione ben definita del modulo  $k^2$ :

$$\left| \frac{\omega}{\omega'} \right| = \frac{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}}{\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_1^2t^2)}}$$

Riportiamo una tabella dei valori espliciti delle grandezze fin qui trattate, in funzione di valori di  $k$  compresi tra 0 ed 1:

$k^2$	$k_1^2$	$\omega$	$\omega'$	$ \omega/\omega' $
0	1	1.5708	$\infty$	0
0.1	0.9	1.7233	2.8988	0.594
0.2	0,8	1.8116	2.5507	0.710
0.3	0.7	1.8970	2.3507	0.807
0.4	0.6	1.9857	2.2019	0.902
0.5	0.5	2.0858	2.0858	1.000
0.6	0.4	2.2019	1.9857	1.109
0.5	0.3	2.3507	1.8970	1.239
0.8	0.2	2.5507	1.8116	1.408
0.9	0.1	2.8988	1.7233	1.682
1	0	$\infty$	1.5708	$\infty$

$k^2$		Periodi		Zeri
<b>0</b>	<b>x</b>	$i \infty$	6.2832	0
	<b>y</b>	$i \infty$	6.2832	1.5708
	<b>z</b>	$i \infty$	$\infty$	$i \infty$
<b>0.250</b>	<b>x</b>	$4.8825 i$	6.7430	0
	<b>y</b>	$3.3715 + 4.8825 i$	6.7430	1.8541
	<b>z</b>	$9.7650 i$	3.3715	$1.8514 + 2.4413 i$
<b>0.500</b>	<b>x</b>	$4.1716 i$	8.3432	0
	<b>y</b>	$4.1716 + 4.1716 i$	8.3432	2.0858
	<b>z</b>	$8.3432 i$	4.1716	$2.0858 + 2.0858 i$
<b>0.750</b>	<b>x</b>	$3.3715 i$	9.7560	0
	<b>y</b>	$4.8825 + 3.3715 i$	9.7560	2.4413
	<b>z</b>	$7.4163 i$	4.8825	$2.4413 + 1.8541 i$
<b>1</b>	<b>x</b>	$3.1416 i$	$\infty$	0
	<b>y</b>	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	<b>z</b>	$6.2832 i$	$\infty$	$\infty$

## 14. Primitive.

---

Determiniamo le primitive delle nostre tre funzioni. A tale scopo premettiamo i seguenti risultati, facilmente deducibili con tecniche di quadratura:

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 x}} = -\frac{1}{m} \log[m \cos x + \sqrt{1-m^2 \sin^2 x}] \quad [49]$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{m} \arcsin(m \sin x) \quad [50]$$

Calcoliamo la funzione primitiva di  $x(u)=sn(u)$ ; effettuiamo il cambiamento di variabile, che utilizzeremo spesso in seguito, che definisce la relazione di inversione degli integrali ellittici

$$x = \sin \phi \quad [51]$$

che dà anche

$$y = \cos \phi$$

$$z = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}$$

otteniamo:

$$x' du = \cos \phi d\phi$$

$$yz du = y d\phi$$

$$du = \frac{d\phi}{z}$$

e la primitiva si calcola come:

$$\int x(u) du = \int \frac{x}{z} d\phi = \int \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = -\frac{1}{k} \log[k \cos \phi + \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}]$$

e, in definitiva,

$$\int x(u) du = -\frac{1}{k} \log(ky + z) \quad [52]$$

che è la primitiva cercata.

Valutiamo ora la primitiva di  $y(u) = cn(u)$ .

Effettuiamo lo stesso cambiamento di variabile [51] ed abbiamo:

$$\int y(u)du = \int \frac{y}{z} d\phi = \int \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{1}{k} \arcsin(kx) \quad [53]$$

che è la primitiva cercata, avendo fatto uso del lemma [50].

Troviamo infine la primitiva di  $z(u) = dn(u)$ .

Effettuiamo il solito cambiamento di variabile [51] ed abbiamo:

$$\int z(u)du = \int \frac{z}{z} d\phi = \int d\phi = \phi = \arcsin x \quad [54]$$

che è la primitiva cercata.

## 15. Altri integrali.

---

Determiniamo alcuni altri integrali notevoli contenenti le funzioni  $x, y, z$ . Per tutti gli integrali che calcoleremo sarà usato il cambiamento di variabile [51]  $x = \text{sen } \phi$ .

$$\begin{aligned} \int x^2(u)du &= \int \frac{x^2}{z} d\phi = \int \frac{\sin^2 \phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} d\phi = \frac{1}{k^2} \int \frac{k^2 \sin^2 \phi - 1 + 1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} d\phi \\ &= \frac{1}{k^2} \left( \int \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} - \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} \right) = \frac{1}{k^2} [F(\phi; k) - E(\phi; k)] \end{aligned} \quad [55]$$

l'integrale del quadrato della funzione  $x$ , ovvero, nella opportuna metrica, il suo modulo quadro, si esprime come differenza di due integrali particolari detti ellittici di prima e seconda specie, che vedremo in dettaglio nella sez. 16.

Poichè l'integrando è non negativo, su ogni intervallo non decrescente della variabile  $u$ , l'espressione [55] è non negativa, ed esprime il fatto che l'integrale di prima specie è non inferiore a quello di seconda specie:

$$F(\phi; k) \geq E(\phi; k) \quad [56]$$

Calcoliamo ora:

$$\int y^2(u)du = \int \frac{y^2}{z} d\phi = \int \frac{\cos^2 \phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} d\phi = \frac{1}{k^2} \int \frac{k^2 - k^2 \sin^2 \phi - 1 + 1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} d\phi$$

$$= \frac{1}{k^2} \left( \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi + \int \frac{k^2 - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi \right) = \frac{1}{k^2} [E(\phi; k) - (1 - k^2)F(\phi; k)] \quad [57]$$

ovvero, il modulo quadro della funzione  $y$  si esprime come combinazione lineare degli integrali ellittici di prima e seconda specie.

Sempre in virtù della non negatività dell'integrando, vale la relazione

$$E(\phi; k) \geq (1 - k^2) F(\phi; k)$$

ed in definitiva, per la [56]:

$$F(\phi; k) \geq E(\phi; k) \geq (1 - k^2) F(\phi; k) \quad [58]$$

che mostra, tra l'altro come, per  $k=0$  si abbia ovviamente l'identità  $F(\phi; 0) = E(\phi; 0)$ .

Calcoliamo infine:

$$\int z^2(u) du = \int \frac{z^2}{z} d\phi = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi = E(\phi; k) \quad [59]$$

che è l'integrale ellittico di seconda specie.

La somma dei moduli quadri vale:

$$\int (x^2 + y^2 + z^2) du = \frac{1}{k^2} [F - E + E + (k^2 - 1)F + k^2 E] = F(\phi; k) + E(\phi; k) \quad [60]$$

Il calcolo dei momenti centrifughi è banale, avendosi immediatamente dalle [1]:

$$\int xy(u) du = -\frac{1}{k^2} \int z' du = -\frac{z}{k^2} \quad [61]$$

$$\int xz(u) du = -\int y' du = -y \quad [62]$$

$$\int yz(u) du = \int x' du = x \quad [62]$$

ed infine

$$\int (x + y + z)^2 du = F(\phi; k) + E(\phi; k) - 2\frac{z}{k^2} - 2y + 2x$$

## 16. Integrali ellittici completi.

---

Abbiamo scritto l'espressione esplicita dei due periodi, uno reale, l'altro immaginario puro, per le funzioni ellittiche  $sn(u)$ ,  $cn(u)$ ,  $dn(u)$  ed abbiamo colà incontrato degli integrali particolari. Studiamoli con maggiore dettaglio.

Tutti gli integrali ellittici legati a funzioni del secondo ordine, quali sono quelle viste, si riconducono a combinazioni lineari di tre forme particolari (teorema di Legendre), e precisamente:

all'integrale ellittico di prima specie:

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2 x^2)(1-x^2)}} \quad [64]$$

all'integrale ellittico di seconda specie:

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi = \int_0^x \sqrt{(1-k^2 x^2)(1-x^2)} dx \quad [65]$$

e all'integrale ellittico di terza specie:

$$\Pi(\phi, n, k) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1+n \sin^2 \phi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-k^2 x^2)(1-x^2)}} \quad [66]$$

Dove vale sempre la posizione  $\sin \phi = x$ .

Gli integrali dipendono dall'estremo superiore di integrazione  $\phi$ , detto amplitudine. Nel caso l'amplitudine assuma il valore  $\pi/2$ , corrispondente ad  $x=1$ , gli integrali [64], [65] e [66] si dicono completi e si designano omettendo la dipendenza dall'amplitudine  $\phi$ :

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2 x^2)(1-x^2)}} \quad [67]$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi = \int_0^1 \sqrt{(1-k^2 x^2)(1-x^2)} dx \quad [68]$$

$$\Pi(n, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1+n \sin^2 \phi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-k^2 x^2)(1-x^2)}} \quad [69]$$

in tutti i casi si intende sempre  $k^2 < 1$ .

Nel caso fosse  $k^2 = m^2 > 1$ , l'estremo superiore di integrazione, cioè l'amplitudine massima, non può più essere  $\pi/2$ , ma assume un valore inferiore  $\alpha$  tale che sia  $\sin \alpha = 1/m$  di modo che i radicandi abbiano senso.

L'integrale di prima specie diventa allora, per  $0 < \phi < \alpha$  :

$$F(m) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi}}$$

posto allora  $\sin \theta = m \sin \phi$ , si ha:

$$\cos \theta d\theta = m \cos \phi d\phi$$

$$d\phi = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{1-\sin^2 \theta}{1-\sin^2 \phi}} d\theta = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{1-\sin^2 \theta}{1-\frac{1}{m^2} \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi}} = \int_0^\theta \frac{1}{m} \sqrt{\frac{1-\sin^2 \theta}{1-\frac{1}{m^2} \sin^2 \theta}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta = \frac{1}{m} F\left(\frac{1}{m}, \theta\right) \quad [70]$$

e, per l'integrale completo:

$$\int_0^\alpha \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{1}{k} F\left(\frac{1}{k}\right) \quad [71]$$

che rientra nel caso standard [67] essendo  $1/k < 1$ .

Del tutto analogo il caso dell'integrale di seconda specie. Usiamo le stesse notazioni ed abbiamo:

$$\int_0^\phi \sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi} d\phi = \int_0^\theta \sqrt{1-\sin^2 \theta} \frac{1}{m} \sqrt{\frac{1-\sin^2 \theta}{1-\frac{1}{m^2} \sin^2 \theta}} d\theta = \frac{1}{m} \int_0^\theta \frac{(1-\sin^2 \theta)}{\sqrt{1-\frac{1}{m^2} \sin^2 \theta}} d\theta$$

scomponendo l'integrale nei suoi addendi abbiamo che il primo vale proprio  $\frac{1}{m} F\left(\frac{1}{m}, \theta\right)$ , mentre il secondo è:

$$\begin{aligned} -m \int_0^\theta \frac{\frac{1}{m^2} \sin^2 \theta}{\sqrt{1-\frac{1}{m^2} \sin^2 \theta}} d\theta &= -m \int_0^\theta \frac{1-\frac{1}{m^2} \sin^2 \theta - 1}{\sqrt{1-\frac{1}{m^2} \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= -m \int_0^\theta \sqrt{1-\frac{1}{m^2} \sin^2 \theta} d\theta + m \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{m^2} \sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

che è una combinazione lineare di integrali di prima e seconda specie; in definitiva:

$$\int_0^\varphi \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \phi} d\phi = \frac{1}{m} F\left(\frac{1}{m}, \theta\right) - mF\left(\frac{1}{m}, \theta\right) + mE\left(\frac{1}{m}, \theta\right) \quad [72]$$

e l'integrale ellittico completo di seconda specie, con modulo  $k^2 > 1$  vale:

$$\int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi = \left(\frac{1}{k} - k\right) F\left(\frac{1}{k}\right) + kE\left(\frac{1}{k}\right) \quad [73]$$

Nella stessa maniera valutiamo l'integrale di terza specie:

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \frac{d\phi}{(1+n \sin^2 \phi)\sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi}} &= \int_0^\theta \frac{1}{m} \sqrt{\frac{1-\sin^2 \theta}{1-\frac{1}{m^2} \sin^2 \theta}} \frac{d\theta}{(1+\frac{n}{m^2} \sin^2 \theta)\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{m} \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+\frac{n}{m^2} \sin^2 \theta)\sqrt{1-\frac{1}{m^2} \sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

per cui:

$$\int_0^\varphi \frac{d\phi}{(1+n \sin^2 \phi)\sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi}} = \frac{1}{m} \Pi\left(\varphi, \frac{n}{m^2}, \frac{1}{m}\right) \quad [74]$$

e per l'integrale completo:

$$\int_0^\theta \frac{d\phi}{(1+n \sin^2 \phi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{1}{k} \Pi\left(\frac{n}{k^2}, \frac{1}{k}\right) \quad [75]$$

L'integrale di terza specie non si può in generale ricondurre ad una combinazione lineare di integrali di prima e seconda specie, se non in casi del tutto particolari.

Innanzitutto vale la relazione:

$$\Pi(\phi, 0, k) = F(\phi, k) \quad [76]$$

inoltre, se il parametro  $n$  della [69] è pari a  $-1$  o a  $-k^2$ , l'integrale di terza specie si esprime in funzione di quelli di prima e seconda.

Per quel che ci serve in seguito, analizziamo il caso in cui sia  $n = -k^2$ .

Decomponiamo l'integrando della [69] in fratti semplici nel seguente modo:

$$\frac{(1-k^2)d\phi}{(1-k^2 \sin^2 \phi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} + \frac{d}{d\phi} \frac{A(\phi)}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \quad [77]$$

e determiniamo la funzione  $A=A(\phi)$ . A tal fine calcoliamo esplicitamente il secondo membro:

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\phi} + \frac{A'(\phi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} + \frac{A(\phi)k^2\sin\phi\cos\phi}{(1-k^2\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

$$\frac{(1-k^2\sin^2\phi)^2 + A'(\phi)(1-k^2\sin^2\phi) + A(\phi)k^2\sin\phi\cos\phi}{(1-k^2\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

l'uguaglianza delle due frazioni impone l'uguaglianza dei numeratori, e cioè che sia:

$$1-k^2 = 1 - 2k^2\sin^2\phi + k^4\sin^4\phi + A' - A'k^2\sin^2\phi + Ak^2\sin\phi\cos\phi$$

$$-k^2 = -k^2(2\sin^2\phi - A\sin\phi\cos\phi) + k^4\sin^4\phi + A' - A'k^2\sin^2\phi$$

poniamo ora  $A=k^2B$ , che dà  $A'=k^2B'$  e ordiniamo secondo i le potenze di  $k$ :

$$-k^2 = -k^2(2\sin^2\phi - B') + k^4(-B'\sin^2\phi + B\sin\phi\cos\phi + \sin^4\phi) \quad [78]$$

uguagliando i coefficienti di  $k^2$  otteniamo un'equazione differenziale per  $B$ :

$$1 = 2\sin^2\phi - B'$$

$$B' = 2\sin^2\phi - 1 = -\cos 2\phi$$

$$B = -(\sin 2\phi)/2 + H = -\sin\phi\cos\phi + H$$

e determiniamo la costante di integrazione  $H$  imponendo l'annullamento del coefficiente di  $k^4$  nella [78]:

$$-(2\sin^2\phi - 1)\sin^2\phi - \sin^2\phi\cos^2\phi + H\sin\phi\cos\phi + \sin^4\phi = 0$$

che dà immediatamente  $H = 0$ ; la funzione  $A$  vale perciò  $A = -k^2\sin\phi\cos\phi$ ; e possiamo scrivere quindi l'espressione particolare per l'integrale di terza specie integrando la [77]:

$$\Pi(\phi, -k^2, k) = \frac{1}{1-k^2} \left[ E(\phi, k) - \frac{k^2\sin\phi\cos\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \right] \quad [79]$$

Calcoliamo infine il rateo di variazione degli integrali completi al variare del modulo  $k$ :

Vediamo l'integrale di prima specie:

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \int \frac{\partial}{\partial k} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = \int \frac{k\sin^2\phi d\phi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\phi)^3}} = \frac{1}{k} \int \frac{(k^2\sin^2\phi - 1 + 1)d\phi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\phi)^3}}$$



$$-\frac{1}{k} \int \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} + \frac{1}{k} \int \frac{d\phi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \phi)^3}} = \frac{1}{k} [-F(k) + \Pi(-k^2, k)] = \frac{1}{k} \left[ \frac{E(k)}{1-k^2} - F(k) \right]$$

dove si è utilizzata la [78] per valutare l'integrale completo di terza specie con parametro  $n = -k^2$ . A causa della [58] tale espressione è non negativa, pertanto  $F(k)$  è una funzione non decrescente del modulo.

Vediamo l'integrale di seconda specie:

$$\frac{\partial E}{\partial k} = \int \frac{\partial}{\partial k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi = - \int \frac{k \sin^2 \phi d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = - \frac{1}{k} \int \frac{(k^2 \sin^2 \phi - 1 + 1) d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{1}{k} [E(k) - F(k)]$$

a causa della [58] tale espressione è non positiva, pertanto  $E(k)$  è una funzione non crescente del modulo.

Riepilogando:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial k} = \frac{1}{k} \left[ \frac{E(k)}{1-k^2} - F(k) \right] \\ \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{k} [E(k) - F(k)] \end{cases} \quad [80]$$

Queste due espressioni sono suscettibili di una semplice ed utile formulazione matriciale. Indichiamo a tale scopo con  $\mathbf{Q}$  il vettore colonna le cui componenti sono gli integrali completi di prima e seconda specie con  $\mathbf{A}$  la matrice, funzione del modulo  $k$ , che realizza le trasformazioni lineari [80] :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial k} = \frac{1}{k} \mathbf{A} \mathbf{Q} \quad [81]$$

dove:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} F \\ E \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{1-k^2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial k} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2k}{(1-k^2)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice  $\mathbf{A}$  vale  $k^2/(1-k^2)$  ed è quindi non nullo per  $k \neq 0$ . In tal caso la matrice  $\mathbf{A}$  è invertibile e diagonalizzabile, esiste quindi una base costituita da una combinazione lineare degli

integrali  $F$  ed  $E$  nella quale il sistema [81] è diagonale e le equazioni non sono miste. Gli autovalori della matrice  $A$  sono:

$$\lambda = \pm \frac{ik}{\sqrt{1-k^2}}$$

ed i corrispondenti autovettori

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{ik}{\sqrt{1-k^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{ik}{\sqrt{1-k^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice diagonalizzante è quindi

$$P = \begin{bmatrix} 1 - \frac{ik}{\sqrt{1-k^2}} & 1 + \frac{ik}{\sqrt{1-k^2}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se  $\Psi = PQ$  allora

$$\frac{\partial \Psi}{\partial k} = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{1-k^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{1-k^2}} \end{bmatrix} \Psi$$

E' a questo punto semplice ottenere le derivate parziali seconde degli integrali  $F$  ed  $E$ : basta derivare la [81]:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2} = -\frac{1}{k^2} A Q + \frac{1}{k} \frac{\partial A}{\partial k} Q + \frac{1}{k} A \frac{\partial Q}{\partial k} = -\frac{1}{k^2} A Q + \frac{1}{k} \frac{\partial A}{\partial k} Q + \frac{1}{k^2} A^2 Q = -\frac{1}{k^2} \left( A - k \frac{\partial A}{\partial k} - A^2 \right) Q$$

dove

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{-k^2}{1-k^2} & 0 \\ 0 & \frac{-k^2}{1-k^2} \end{bmatrix} = \frac{-k^2}{1-k^2} I$$

col che, dopo semplici passaggi:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2} = -\frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} \frac{-1+2k^2}{1-k^2} & \frac{1-3k^2}{(1-k^2)^2} \\ -1 & \frac{1}{1-k^2} \end{bmatrix} Q$$

o, esplicitamente,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial k^2} = -\frac{1}{k^2} \left[ \frac{-1+2k^2}{1-k^2} F(k) + \frac{1-3k^2}{(1-k^2)^2} E(k) \right] = -\frac{1}{k} \frac{\partial F}{\partial k} - \frac{1}{k^2} \left[ F(k) + \frac{2}{1-k^2} E(k) \right] \quad [82]$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} = -\frac{1}{k^2} \left[ -F(k) + \frac{1}{1-k^2} E(k) \right] = -\frac{1}{k} \frac{\partial F}{\partial k}$$

mentre

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial k^2} = \frac{1}{1-k^2} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{1-k^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{1-k^2}} \end{bmatrix} \Psi - \frac{1}{1-k^2} \Psi \mathbf{1} = \frac{1}{1-k^2} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{1-k^2}} - 1 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{1-k^2}} - 1 \end{bmatrix} \Psi$$

## 17. Valori particolari del modulo $k$ .

---

Torniamo al sistema di equazioni [1], e vediamo i due casi estremi che si hanno allorché il modulo  $k$  assume i valori limite 0 ed 1.

- **Caso  $k=0$**

Il sistema [1] diventa:

$$\begin{cases} \frac{dx}{du} = yz \\ \frac{dy}{du} = -xz \\ \frac{dz}{du} = 0 \end{cases} \quad [83]$$

la funzione  $z$  diventa una costante, il cui valore è pari al valore iniziale dato da [2]:

$$z(u) = 1$$

e le equazioni [83] si riducono a due:

$$\begin{cases} \frac{dx}{du} = y \\ \frac{dy}{du} = -x \\ z = 1 \end{cases}$$

e si riconoscono immediatamente le funzioni trigonometriche:

$$x(u) = \sin u$$

$$y(u) = \cos u$$

per le quali il periodo reale vale  $2\pi$ , quello immaginario è infinito.

- **Caso  $k=1$**

Il sistema [1] si simmetrizza notevolmente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{du} = yz \\ \frac{dy}{du} = -xz \\ \frac{dz}{du} = -xy \end{cases} \quad [84]$$

l'equazione differenziale [11] per la funzione  $x(u)$  diventa

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{1 - x^2}$$

che si integra immediatamente separando le variabili ed imponendo la condizione iniziale  $x(0)=0$ :

$$\frac{1+x}{1-x} = e^{2u}$$

cioè:

$$x = \frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \tanh u$$

Dalle relazioni pitagoriche si ha inoltre che

$$z(u) = y(u)$$

e che

$$y = \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{\cosh u} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$$

Si tratta sostanzialmente delle funzioni iperboliche; per esse il periodo reale è infinito.

## 18. Variazioni del modulo $k$ .

---

Ricaviamo, in questa sezione, delle relazioni tra le derivate parziali (non esprimibili in forma chiusa) delle nostre tre funzioni ellittiche rispetto al modulo  $k$ .

Partiamo di nuovo dalle relazioni pitagoriche fondamentali e deriviamo le prime due [4] e [5] rispetto a  $k$ :

$$x \frac{\partial x}{\partial k} = -y \frac{\partial y}{\partial k} \quad [84]$$

$$kx^2 + k^2 x \frac{\partial x}{\partial k} = -z \frac{\partial z}{\partial k} \quad [85]$$

Derivando rispetto a  $k$  le equazioni di partenza [1] otteniamo immediatamente:

$$\frac{\partial x'}{\partial k} = y \frac{\partial z}{\partial k} + z \frac{\partial y}{\partial k} \quad [86]$$

$$\frac{\partial y'}{\partial k} = -x \frac{\partial z}{\partial k} - z \frac{\partial x}{\partial k} \quad [87]$$

$$\frac{\partial z'}{\partial k} = -2kxy - k^2 x \frac{\partial y}{\partial k} - k^2 y \frac{\partial x}{\partial k} \quad [88]$$

che si possono rendere più omogenee utilizzando le [84] e [85]. La somma delle prime due dice che

$$\frac{\partial(x'+y')}{\partial k} = (y-x) \frac{\partial z}{\partial k}$$

Abbiamo calcolato la variazione degli integrali completi  $E$  ed  $F$  rispetto al modulo  $k$  nella sezione 16, per il nostro scopo ci serve ora effettuare il calcolo nel caso più generale.

Abbiamo visto che

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{1}{k} \int \frac{(k^2 \sin^2 \phi - 1 + 1) d\phi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^3}} = \frac{1}{k} \left[ -F + \int \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^3}} \right] \quad [89]$$

per valutare l'ultimo integrale nel caso in cui l'estremo di integrazione è generico notiamo che

$$\frac{d}{d\phi} \frac{\sin \phi \cos \phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{1-2 \sin^2 \phi + k^2 \sin^4 \phi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \phi)^3}} = \frac{1}{k^2} \left[ \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} - \frac{1-k^2}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \phi)^3}} \right]$$

possiamo quindi integrare membro a membro ed avere

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \phi)^3}} = \frac{E}{1-k^2} - \frac{k^2 \sin \phi \cos \phi}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$$

che possiamo sostituire nella [89] per dire finalmente che

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{1}{k} \left[ \frac{E}{1-k^2} - F - \frac{k^2 \sin \phi \cos \phi}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \right] \quad [90]$$

che, ripristinando le consuete variabili, riscriviamo come

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{1}{k} \left[ \frac{E}{1-k^2} - F - \frac{k^2 xy}{(1-k^2)z} \right] \quad [91]$$

in quanto  $x = \sin \phi$ .

Il differenziale parziale fatto rispetto a  $k$  di questa ultima relazione, assieme al fatto che  $u = F$  dà

$$\frac{\partial x}{\partial k} + \frac{\partial u}{\partial k} \frac{dx}{du} = \frac{\partial x}{\partial k} + \frac{\partial F}{\partial k} \frac{dx}{du} = 0$$

poiché  $x$  non dipende esplicitamente da  $k$ .

Da quest'ultima abbiamo subito

$$\frac{\partial x}{\partial k} = -yz \frac{\partial F}{\partial k} = -\frac{yz}{k} \left[ \frac{E}{1-k^2} - F - \frac{k^2 xy}{(1-k^2)z} \right]$$

Ricordiamo che la [57] ci dà  $E - (1-k^2)F = k^2 \int y^2$  (l'integrazione si intende effettuata rispetto alla variabile indipendente  $u$ ) per cui

$$\frac{\partial x}{\partial k} = -\frac{yz}{k(1-k^2)} \left[ E - (1-k^2)F - \frac{k^2 xy}{z} \right] = -\frac{kyz}{1-k^2} \left( \int y^2 - \frac{kxy}{z} \right)$$

Moltiplicando e semplificando otteniamo infine l'espressione esplicita che cercavamo:

$$\frac{\partial x}{\partial k} = \frac{k^2 xy^2}{1-k^2} - \frac{kyz}{1-k^2} \int y^2 \quad [92]$$

L'uso della [84] e della [85] fornisce immediatamente le altre due espressioni per le derivate rispetto a  $k$ :

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{-k^2 xy^2}{1-k^2} + \frac{kxz}{1-k^2} \int y^2 \quad [93]$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial k} = \frac{-k^2 x^2 z}{1-k^2} + \frac{k^3 xy}{1-k^2} \int y^2 \quad [94]$$

Abbiamo estesamente analizzato il comportamento differenziale delle funzioni  $x$ ,  $y$ ,  $z$  rispetto al modulo  $k$ . Abbiamo inoltre sempre assunto che fosse  $k^2 < 1$ . E' lecito comunque chiedersi come si comportano tali funzioni per valori del modulo superiori ad 1.

Riprendiamo a tale scopo alcuni risultati ottenuti nella sez. 16. In particolare la [70], che qui riscriviamo:

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{1}{k} F\left(\frac{1}{k}, \theta\right)$$

valida per  $k > 1$ .

Sappiamo che la sua inversione definisce la funzione  $x(u)$ , pertanto è immediato scrivere che vale la relazione:

$$x(u, k) = \frac{1}{k} x\left(uk, \frac{1}{k}\right) \quad [95]$$

dalle relazioni pitagoriche inoltre:

$$y^2\left(uk, \frac{1}{k}\right) = 1 - x^2\left(uk, \frac{1}{k}\right) = 1 - k^2 x^2(u, k) = z^2(u, k)$$

per cui

$$z(u, k) = y\left(uk, \frac{1}{k}\right) \quad [96]$$

in modo analogo:

$$z^2\left(uk, \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{k^2} x^2\left(uk, \frac{1}{k}\right) = 1 - x^2(u, k) = y^2(u, k)$$

e perciò

$$y(u, k) = z\left(uk, \frac{1}{k}\right) \quad [97]$$

ed il calcolo per moduli maggiori di 1 viene ricondotto a quello per moduli inferiori ad 1.

## 19. Funzioni inverse.

---

Analogamente al caso delle funzioni circolari, si possono definire tre nuove funzioni, inverse delle [1] nei rispettivi domini di monotonia:

$$\xi(u) = \operatorname{sn}^{-1}(u) = x^{-1}(u)$$

$$\eta(u) = \operatorname{cn}^{-1}(u) = y^{-1}(u)$$

$$\zeta(u) = \operatorname{dn}^{-1}(u) = z^{-1}(u)$$

il dominio di inversione essendo funzione del modulo  $k$ .

Attraverso la nota formula di derivazione delle funzioni inverse è immediato ottenere una espressione per le derivate di  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ .

Definendo  $X, Y, Z$  come le nostre funzioni [1] nell'argomento  $h=f(u)$  si ha:

$$d[x^{-1}(u)] = \frac{1}{dX(h)} = \frac{1}{Y(h)Z(h)} = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}\sqrt{1-k^2X^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2}}$$

e così pure:

$$d[y^{-1}(u)] = \frac{1}{dY(h)} = -\frac{1}{X(h)Z(h)} = \frac{-k}{\sqrt{1-Y^2}\sqrt{Y^2+k^2-1}} = \frac{-k}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{u^2+k^2-1}}$$

ed infine

$$d[z^{-1}(u)] = \frac{1}{dZ(h)} = -\frac{1}{k^2X(h)Y(h)} = \frac{-1}{\sqrt{1-Z^2}\sqrt{Z^2+k^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{u^2+k^2-1}}$$



Si vede che

$$d[y^{-1}(u)] = kd[z^{-1}(u)]$$

Questi risultati vanno letti anche alla luce di quanto visto nella sezione 4 sull'inversione.

## 20. Formulazione matriciale.

---

Il notevole grado di simmetria del sistema [1] suggerisce di dare una formulazione matriciale al complesso delle proprietà fin qui studiate. Ci limiteremo a presentare solamente alcuni risultati particolari.

Introduciamo il vettore colonna  $\rho = \rho(u)$  le cui componenti sono le funzioni  $x(u)$ ,  $y(u)$ ,  $z(u)$ ; possiamo allora scrivere l'equazione matriciale differenziale

$$\rho' = \mathbf{K} \rho \tag{98}$$

ove la matrice  $\mathbf{K}$  è così definita:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ -z & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 x & 0 \end{bmatrix} \tag{99}$$

Il suo determinante vale:

$$\det(\mathbf{K}) = k^2 xyz$$

e gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{k^2 xyz}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{k^2 xyz} (-1 \pm i\sqrt{3})$$

Le potenze successive di  $\mathbf{K}$  valgono:

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -k^2xy & 0 \\ 0 & 0 & -yz \\ k^2xz & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^3 = \begin{bmatrix} k^2xyz & 0 & 0 \\ 0 & k^2xyz & 0 \\ 0 & 0 & k^2xyz \end{bmatrix} = k^2xyz\mathbf{I}$$

in virtù della quale, per tutte le potenze successive vale

$$\mathbf{K}^{n+3} = k^2xyz\mathbf{K}^n$$

La matrice inversa  $\mathbf{K}^{-1}$  (nei casi in cui esiste) vale

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{k^2x} \\ \frac{1}{z} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La derivata  $\mathbf{K}'$  fatta rispetto ad  $u$  vale

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y' \\ -z' & 0 & 0 \\ 0 & -k^2x' & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{BK} \quad [100]$$

avendo posto

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{xz}{y} & z & -\frac{z^2}{k^2y} \\ -\frac{k^2x^2}{y^2} & -\frac{k^2xy}{z} & x \\ -k^2y & -\frac{k^2y^2}{x} & \frac{zy}{x} \end{bmatrix}$$

La derivata  $\mathbf{K}''$  vale d'altro canto

$$\mathbf{K}'' = \mathbf{B}'\mathbf{K} + \mathbf{B}\mathbf{K}' = (\mathbf{B}' + \mathbf{B}^2)\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -xz' - zx' \\ k^2(x'y + yx') & 0 & 0 \\ 0 & k^2(yz' + zy') & 0 \end{bmatrix} \quad [101]$$

differenziando più volte la [98] otteniamo, ritrovando ed ampliando i risultati delle sezioni 5 e 6:

$$\rho'' = \mathbf{K}'\rho + \mathbf{K}\rho' = \mathbf{K}'\rho + \mathbf{K}^2\rho = (\mathbf{K}' + \mathbf{K}^2)\rho = (\mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{K}^2)\rho = (\mathbf{B} + \mathbf{K})\rho' \quad [102]$$

$$\begin{aligned} \rho''' &= (\mathbf{K}'' + 2\mathbf{K}\mathbf{K}')\rho + (\mathbf{K}' + \mathbf{K}^2)\rho' = (\mathbf{K}''' + 2\mathbf{K}\mathbf{K}' + \mathbf{K}'\mathbf{K} + \mathbf{K}^3)\rho = \\ &= (\mathbf{B}'\mathbf{K} + 2\mathbf{B}^2\mathbf{K} + 2\mathbf{B}\mathbf{K}^2 + \mathbf{K}^3)\rho \end{aligned} \quad [103]$$

e si intravede come, grazie alla posizione [98], tutte le derivate successive di  $\rho$  siano esprimibili in funzione di  $\rho$  stesso attraverso un coefficiente che dipende solo dalla matrice  $\mathbf{K}$ :

$$\rho^{(n)} = f(\mathbf{K})\rho$$

Se in luogo del vettore colonna  $\rho = \rho(u)$  introduciamo il vettore colonna  $\sigma = \sigma(u)$  definito come

$$\sigma(u) = \begin{bmatrix} \xi(u) \\ \eta(u) \\ \zeta(u) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (i\sqrt{3} - 1)\left(\frac{k^2 x z^4}{y^2}\right)^{1/3} + (i\sqrt{3} + 1)\left(\frac{y^2 z^2}{k^2 x}\right)^{1/3} + 2x \\ -(i\sqrt{3} + 1)\left(\frac{k^2 x z^4}{y^2}\right)^{1/3} - (i\sqrt{3} - 1)\left(\frac{y^2 z^2}{k^2 x}\right)^{1/3} + 2x \\ 2\left(\frac{k^2 x z^4}{y^2}\right)^{1/3} - 2\left(\frac{y^2 z^2}{k^2 x}\right)^{1/3} + 2x \end{bmatrix}$$

Allora il sistema [98] diventa diagonale e avremo

$$\sigma' = \mathbf{D}\sigma$$

□□□□□

dove la matrice  $\mathbf{D}$  è:

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{k^2xyz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt[3]{k^2xyz}(-1+i\sqrt{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt[3]{k^2xyz}(-1-i\sqrt{3}) \end{bmatrix} \quad [105]$$

## 21. Un'applicazione: la lemniscata

---

La lemniscata di Bernoulli si definisce come la curva luogo dei punti tali che il prodotto delle distanze di ciascuno da due punti fissi dati sia costante. La sua rappresentazione rispettivamente cartesiana, polare, parametrica razionale e trigonometrica è

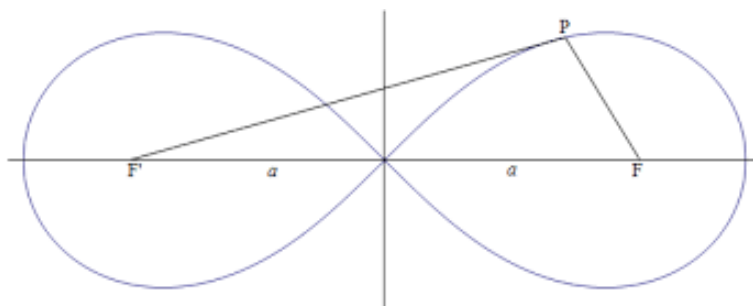
$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

$$\rho^2 = \cos 2\theta \quad [106]$$

$$\begin{cases} x = \frac{t + t^3}{1 + t^4} \\ y = \frac{t - t^3}{1 + t^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} \\ y = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} \end{cases}$$

Graficamente



L'area della lemniscata si trova immediatamente ricorrendo all'espressione polare:

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \rho^2 d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 1$$

La lunghezza dell'arco di curva è

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2} d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} + \cos 2\theta} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}} d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \theta}} d\theta = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} d\theta \end{aligned}$$

avendo impiegato la [71] per ridurre il modulo ad una quantità inferiore a 1. Alla fine

$$L = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} d\theta = 2\sqrt{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\varpi \quad [107]$$

La costante  $\varpi$  gioca nella lemniscata lo stesso ruolo effettuato da  $\pi$  per la circonferenza, il suo valore approssimato è 2.62205755429212.... L'integrale ellittico presente nella [107] viene trasformato nel seguente:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\varpi}{2} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \quad [108]$$

Dal fatto che l'elemento di arco in coordinate polari è

$$\left(\frac{ds}{d\rho}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\rho d\theta}{d\rho}\right)^2 = 1 + \frac{\rho^4}{1-\rho^4} = \frac{1}{1-\rho^4}$$

la lunghezza dell'arco nel primo quadrante è esprimibile anche come

$$l = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad [109]$$

L'integrale

$$\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = u$$

viene invertito alla stessa maniera dell'integrale  $\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = z$  che definisce  $s = \sin z$ : allora è naturale porre

$$\begin{cases} s = sl(u) \\ cl(u) = sl\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \end{cases} \quad [110]$$

e la relazione con le funzioni viste è stabilita dal fatto che, nelle [1] occorre porre  $k = 1/\sqrt{2}$ .

Fagnano, nel 1718, sorprende tutti dimostrando che l'arco di lemniscata, come quello della circonferenza, può essere bisecato con riga e compasso. All'integrale [109] può essere applicata la sostituzione

$$x^2 = \frac{2\tau^2}{1+\tau^4} \quad [111]$$

che dà  $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sqrt{2} \frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^4}}$

per cui

$$\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{1+\sqrt{1-s^2}}{s}} \frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^4}}$$

A questo integrale può essere applicata la sostituzione

$$\tau^2 = \frac{2\sigma^2}{1-\sigma^4} \quad [112]$$

che dà  $\frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^4}} = \sqrt{2} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^4}}$

per cui, alla fine,

$$\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2 \int_0^\psi \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^4}} \quad [113]$$

dove

$$s^2 = \frac{4\psi^2(1-\psi^4)}{(1+\psi^4)^2} \quad [114]$$

La combinazione delle due sostituzioni è

$$x^2 = \frac{4\sigma^2(1-\sigma^4)}{1+4\sigma^4} \quad [115]$$

Il seno lemniscato obbedisce ad una formula di riduzione analoga alla [30] ossia

$$sl(u) + sl(v) = sl\left(\frac{u\sqrt{1-v^4}+v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}\right) \quad [116]$$

Con questa notazione la [30] diviene

$$x(u) + x(v) = x\left(\frac{u\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}+v\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}{1+u^2v^2}\right) \quad [117]$$

Formule del tipo [116, 117] sono dette di addizione degli integrali ellittici di prima specie.

## 22. Note storiche

---

L'analisi infinitesimale già nel XVII secolo aveva messo a disposizione gli strumenti che consentivano, in linea di principio, di calcolare la lunghezza di una curva avente una forma qualsiasi. Il problema, era stato risolto molto semplicemente per la circonferenza, in virtù della possibilità di esprimere la lunghezza di un arco mediante funzioni elementare e loro inverse, in particolare attraverso le funzione trigonometriche circolari di modo che si poteva dire, per il primo quadrante che

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

La lunghezza dell'ellisse invece era espressa da un integrale avente un parametro, il modulo, collegato alla sua eccentricità che non si può esprimere mediante funzioni elementari, nel quale riconosciamo l'integrale detto appunto ellittico (di prima specie)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Jakob e Johann Bernoulli studiarono estesamente integrali del genere appena visto, anche in relazione alla determinazione della lunghezza dell'arco di lemniscata, ciò accadeva alla fine del secolo XVII. Johann nel 1703 asserì che non esistevano primitive elementari per gli integrali di tipo ellittico.

Pochi anni dopo, siamo nel secondo decennio del 1700, il Marchigiano dimostrò che somma e differenza di archi di una stessa ellisse o iperbole o lemniscata o cicloide sono espressioni algebriche delle coordinate, così come accade per la circonferenza. Nel 1718 egli mostrò come dividere algebricamente un arco di lemniscata in 2, 3 o 5 parti uguali.

Eulero venne in possesso dei lavori di Fagnano nel 1735, ne fu molto colpito e sviluppò una teoria dell'integrazione, che dimostrò avere soluzioni algebriche se  $m/n$  è razionale, della famiglia di equazioni differenziali

$$\frac{m dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

In particolare se  $m=n$  allora un integrale è ad esempio



$$x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1$$

Nel 1756 Eulero approfondisce ulteriormente la questione e stabilisce che è possibile dividere algebricamente un arco di lemniscata in  $2^n(1+2^n)$  parti uguali tra loro.

Occorre attendere i lavori di Legendre a fine secolo per avere sviluppi ulteriori e stabilire che ogni integrale ellittico può essere ricondotto ad uno dei tre tipi da noi visti nella sezione 4. Nel suo compendio del 1825, Legendre si riferiva agli integrali, quando un estremo era variabile, come a “funzione ellittica”.

A questo punto, poco prima di terminare il terzo e ultimo volume del suo trattato, Legendre viene a conoscenza del molto più potente metodo ideato da Jacobi ed Abel di invertire gli integrali, il che rendeva semplice determinare in maniera universale il teorema di addizione per gli integrali e quindi per le funzioni ellittiche.

Abel spinge la sua analisi a considerare come radicandi i polinomi di grado superiore al quarto, i cui integrali chiamò ultraellittici; sull'altro versante Jacobi, negli stessi anni, invertendo l'integrale di prima specie definisce le proprietà delle funzioni da noi viste nella sezione 1.

Nel 1844 Liouville riconobbe nella doppia periodicità il carattere fondamentali delle funzioni ottenute per inversione degli integrali, che chiamò ovviamente ellittiche. Stabili inoltre che tali periodi sono indipendenti tra loro sui reali e che le uniche funzioni prive di poli e limitate sono le costanti.

Eisenstein nel 1847 diede il primo esempio di funzione ellittica ottenuta mediante una serie

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z + m\omega_1 + n\omega_2)^2}$$

Weierstrass a metà secolo cambiò prospettiva conducendo lo studio al caso in cui il radicando è un polinomio di terzo grado, caratterizzato dai suoi invarianti  $g_k$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$$

la cui inversione definisce la funzione ellittica fondamentale  $\wp(u)$  che risolve l'equazione differenziale, anch'essi di forma ellittica (si veda la sezione 5)

$$[\wp'(u)]^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$$

e che ha l'espressione in serie doppiamente infinita

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum'_{\omega} \left[ \frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]$$

dove  $\omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$  è in relazione ai periodi.

Con Riemann, nel 1857, si risolve il problema generale della inversione degli integrali su funzioni a più valori, mediante l'introduzione del concetto di superficie che porta il suo nome e le basi della teoria delle funzioni ellittiche si poterono così dire consolidate.

### 23. *Appendice*

---

Figura 1: grafico delle funzioni  $x, y, z$  per  $k=0.2$

Figura 2: grafico delle funzioni  $x, y, z$  per  $k=0.8$

Figura 3: grafico delle funzioni  $x', y', z'$  per  $k=0.2$

Figura 4: grafico delle funzioni  $x', y', z'$  per  $k=0.8$

Figura 5: grafici parametrizzati della funzione  $k^2xyz$

Nota: nei grafici che seguono, in ascisse il valore della variabile indipendente  $u$  è moltiplicato per 50, pertanto le funzioni sono rappresentate nell'intervallo  $0 \leq u \leq 5$ .

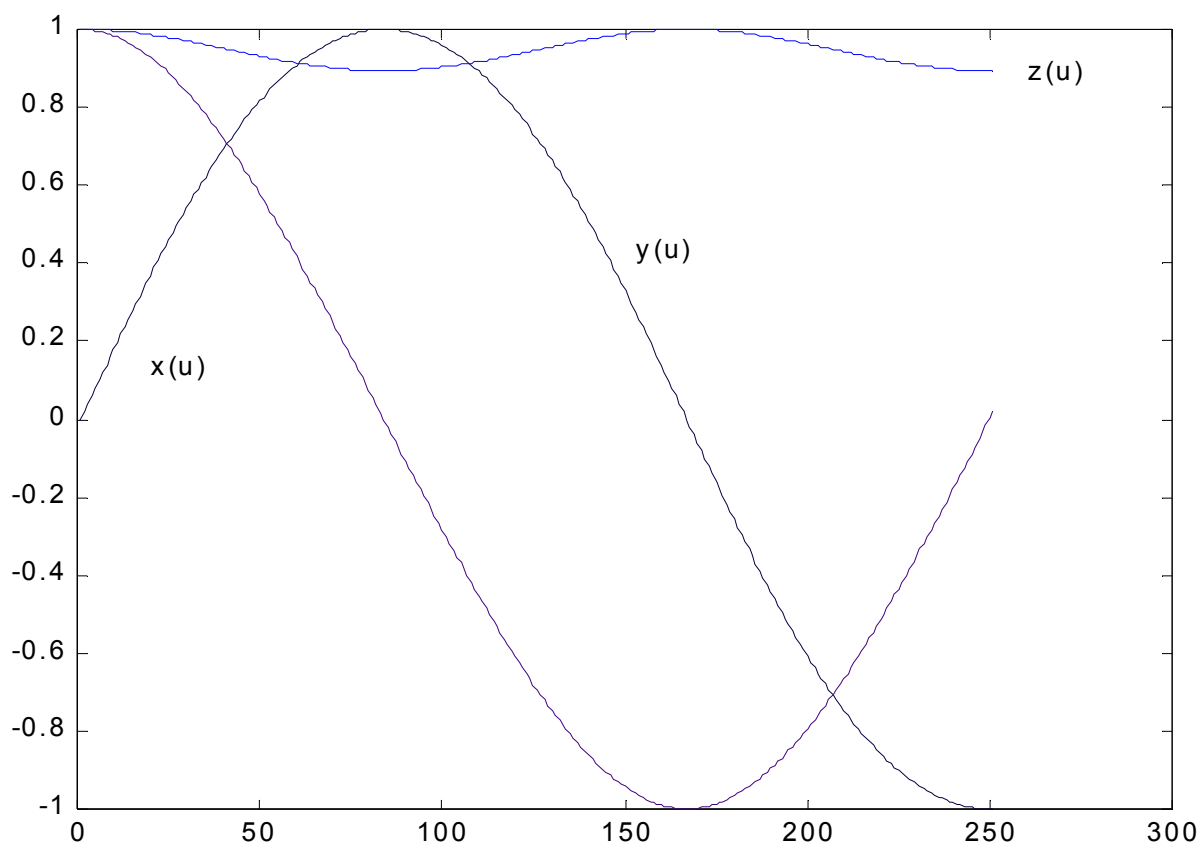


Figura 1: grafico delle funzioni  $x, y, z$  per  $k=0.2$

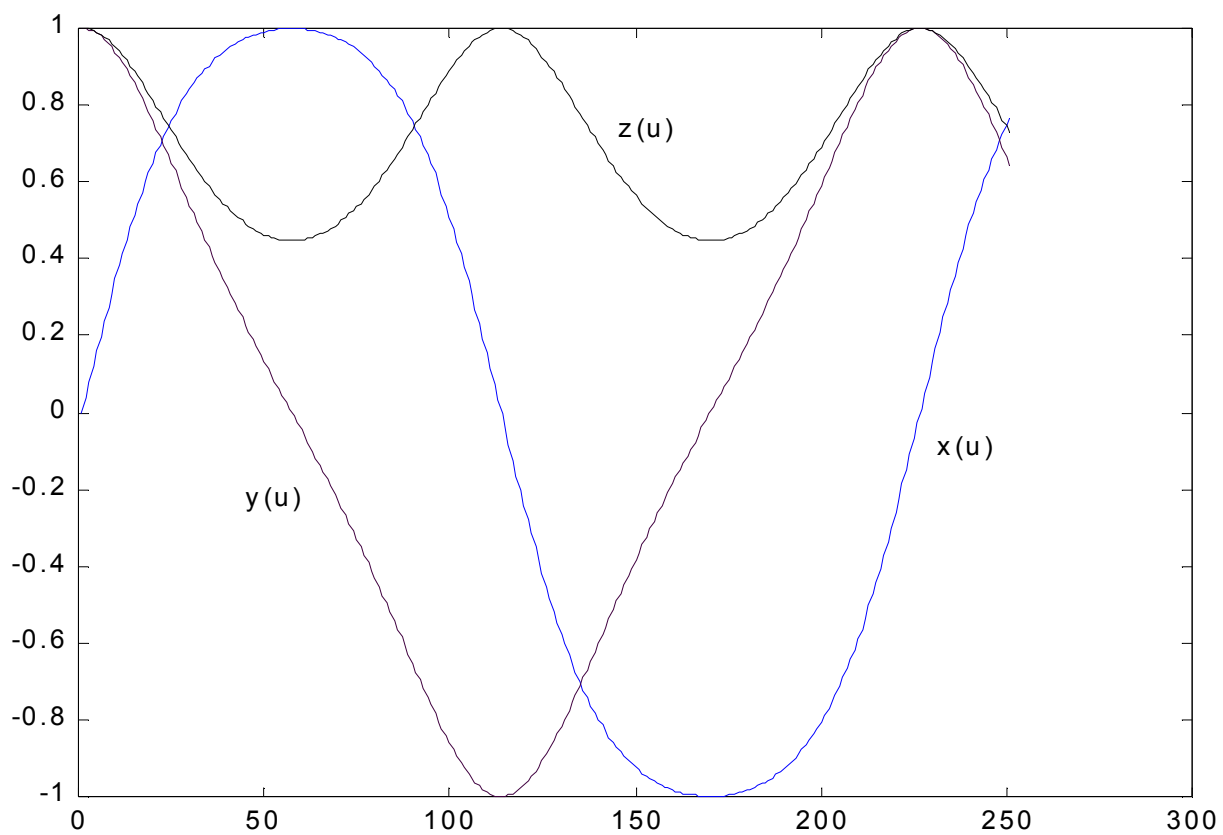


Figura 2: grafico delle funzioni  $x, y, z$  per  $k=0.8$

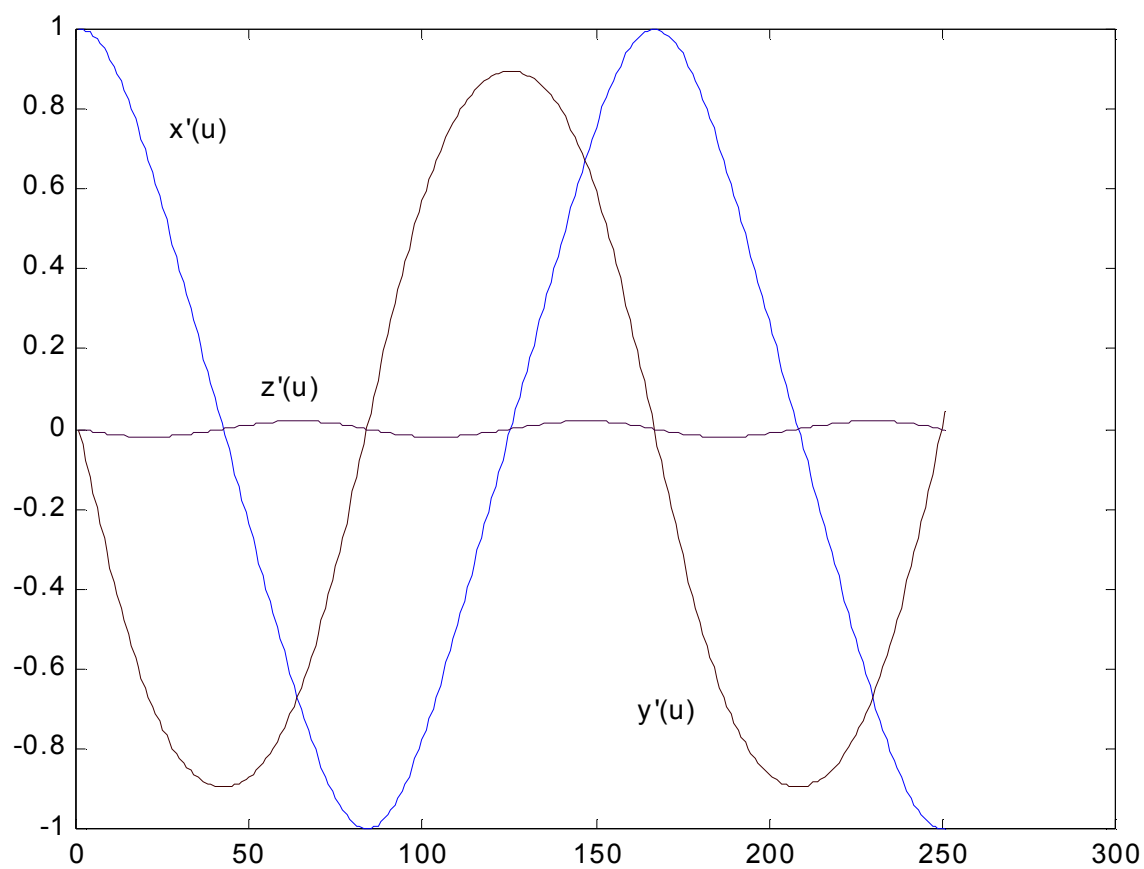


Figura 3: grafico delle funzioni  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  per  $k=0.2$

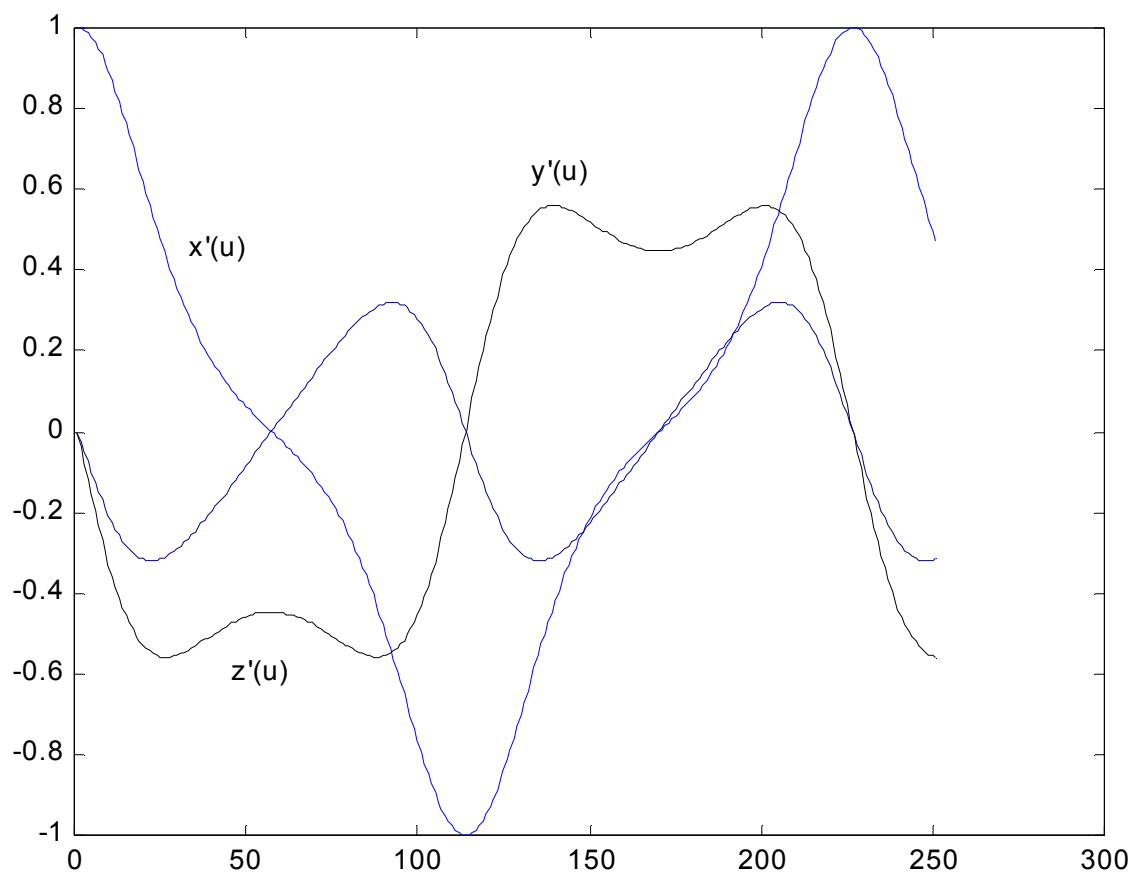


Figura 4: grafico delle funzioni  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  per  $k=0.8$

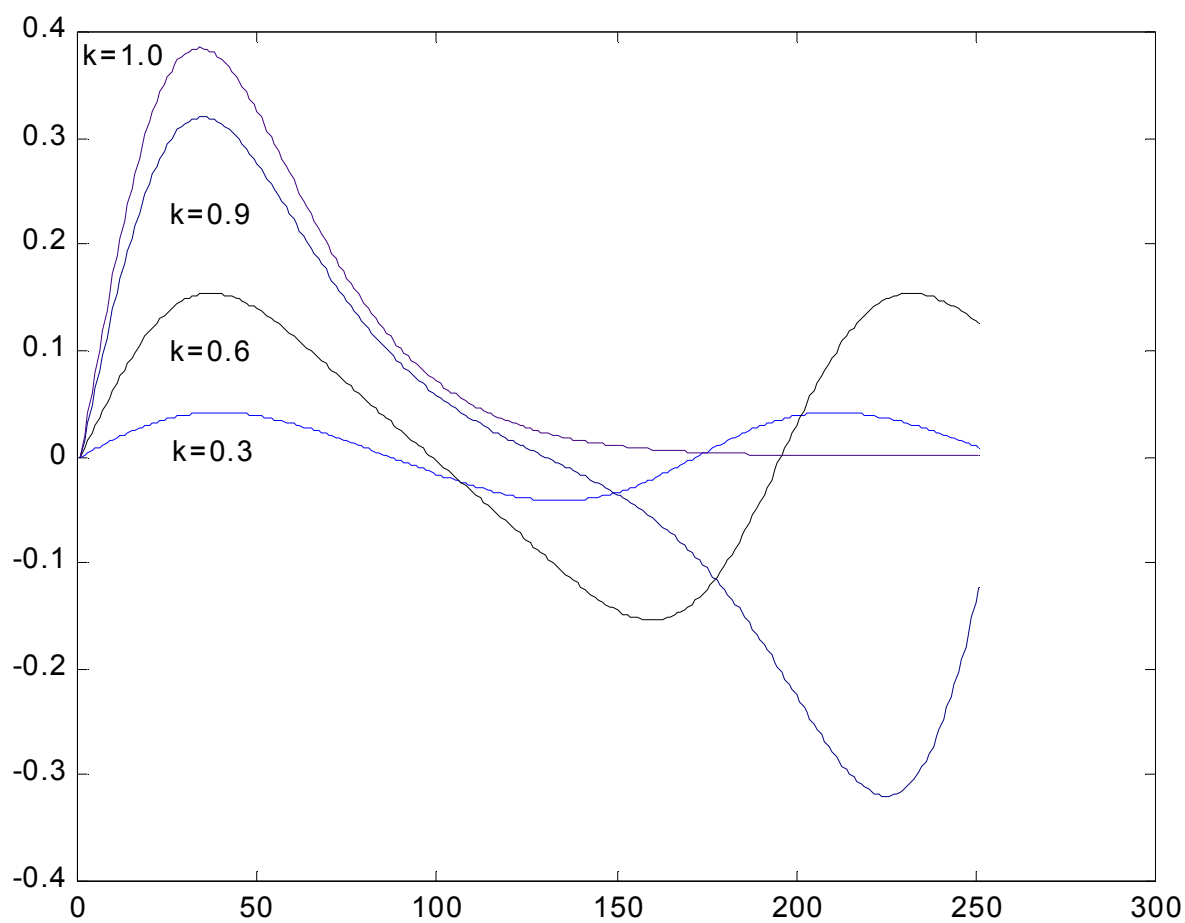


Figura 5: grafici parametrizzati della funzione  $k^2xyz$

## 24. Altre letture

---

La bibliografia sulle funzioni ellittiche, trattate a vario livello, è amplissima. Indico qui solo pochi testi nei quali è possibile trovare ulteriori rimandi e suggerimenti.

Innanzitutto è sempre bene avere a portata di mano il vecchio ma ancora utile

- M. Abramowitz, I.A. Stegun: *Handbook of mathematical functions*, National Bureau of Standards Applied Mathematics (1972)

Una trattazione abbastanza semplice si può trovare in

- V.I. Smirnov: *Corso di matematica superiore*, vol III tomo 2, editori Riuniti (1978)

Molto più impegnativo, per specialisti, è

- F. Tricomi: *Funzioni Ellittiche*, Boringhieri (1951)

Dello stesso autore, in un ambito più vasto, si può leggere

- F. Tricomi: *Istituzione di analisi superiore*, CEDAM (1964)

Ricco di formule, ma succinto è

- H. Bateman (ed. A. Erdelyi): *Higher Transcendental Functions*, vol II, McGraw-Hill (1953)

Tra i recenti mi limito a segnalare il già classico

- E. T. Whittaker, G. N. Watson: *A course of Modern Analysis*, Cambridge University Press (1990)

Immane ed intramontabile, tratta delle trasformazioni delle funzioni ellittiche

- K. G. Jacobi: *Fundamenta novae theoriae functionum ellipticarum*, Königsberg (1829)