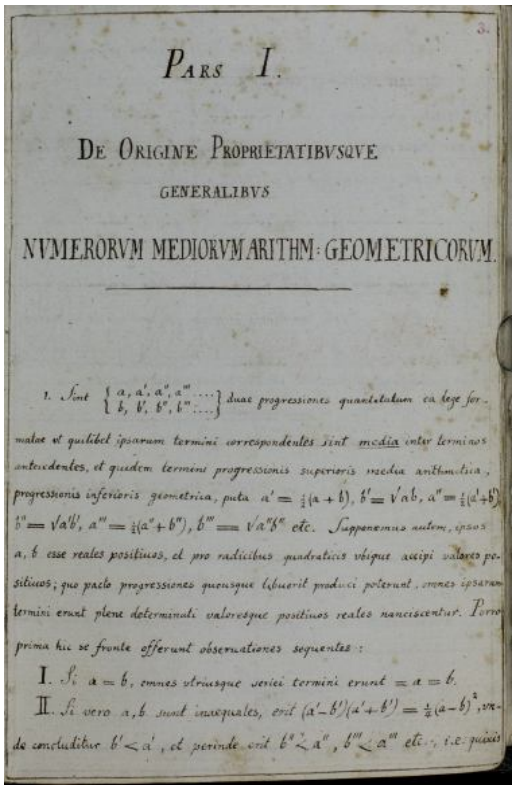
ORIGINE E PROPRIETÀ GENERALI DELLE MEDIE ARITMETICO-GEOMETRICHE

De origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithm. geometricorum.

Carl Friedrich Gauss

Werke, II p. 361

Traduzione e note di Carmine Suriano (2018)



PARS I.

DE ORIGINE PROPRIETATIBVSQVE GENERALIBVS NVMERORVM MEDIORVM ARITHM: GEOMETRICORVM.

1. Sint $\left\{\begin{matrix} a, a', a'', a''' \ldots \\ b, b', b'', b''' \ldots \end{matrix}\right\}$ duae progressiones quantlibetum ea lege formatae vt quilibet ipsarum termini correspondentes sint media inter terminos antecedentes, et quidem termini progressionis superioris media arithmetica, progressionis inferioris geometrica, puta $a' = \frac{1}{2}(a+b)$, $b' = \sqrt{ab}$, $a'' = \frac{1}{2}(a'+b')$, $b'' = \sqrt{a'b'}$, $a''' = \frac{1}{2}(a''+b'')$, $b''' = \sqrt{a''b''}$ etc. Supponemus autem, ipsos a, b esse reales positiuos, et pro radicibus quadraticis vbique accipi valores positiuos; quo pacto progressiones quousque libuerit produci poterunt, omnes ipsarum termini erunt plene determinati valoresque positiuos reales nanciscentur. Porro prima hic se fronte offerunt obseruationes sequentes:

I. Si $a = b$, omnes vtriusque seriei termini erunt $= a = b$.

II. Si vero a, b sunt inaequales, erit $(a'-b')(a'+b') = \frac{1}{2}(a-b)^2$, vnde concludetur $b' < a'$, et perinde erit $b'' > a''$, $b''' < a'''$ etc., i.e. quoties

Ritratto di Gauss e Manoscritto contenuto nel primo volume degli "*Opuscula varii argumenti*"

ORIGINE E PROPRIETÀ GENERALI DELLE MEDIE ARITMETICO-GEOMETRICHE

PARTE PRIMA

1.

Siano $\begin{Bmatrix} a, a', a'', a''' \ldots \\ b, b', b'', b''' \ldots \end{Bmatrix}$ due successioni di grandezze formate mediante una legge tale che i termini corrispondenti delle stesse siano le *medie* dei termini precedenti, e che ciascun termine della successione superiore sia la media aritmetica, della successione inferiore la media geometrica, ossia

$$a' = \frac{1}{2}(a+b), \quad b' = \sqrt{ab}, \quad a'' = \frac{1}{2}(a'+b'), \quad b'' = \sqrt{a'b'}, \quad a''' = \frac{1}{2}(a''+b''), \quad b''' = \sqrt{a''b''} \text{ ecc.}$$

Supponiamo inoltre che gli stessi *a*, *b* siano numeri reali positivi, e che per le radici quadrate si considerino ovunque i valori positivi[1]; con tale premessa le successioni possono essere estese quanto si vuole, tutti i loro termini saranno completamente determinati e si origineranno valori positivi. Di seguito si hanno innanzitutto le seguenti osservazioni:

I. Se *a*=*b*, tutti i termini di entrambe le serie saranno = *a* = *b*;

II. Se invece *a*, *b* sono diversi, sarà $(a'-b')(a'+b') = \frac{1}{4}(a-b)^2$ dal che si deduce che $b' < a'$ e sarà quindi $b'' < a''$, $b''' < a'''$ ecc. Pertanto in questo caso abbiamo ipotizzato che è anche $b < a$.[2]

III. A seguito della stessa ipotesi sarà $a' < a$, $b' > b$, $a'' < a'$, $b'' > b'$ ecc.[3]; così la successione superiore decresce continuamente, la seconda cresce continuamente; dal che è chiaro che entrambe ammetto un limite[4]; tali limiti si esprimono convenientemente con a^∞, b^∞.

IV. Inoltre da $\frac{a'-b'}{a-b} = \frac{(a-b)}{4(a'+b')} = \frac{a-b}{2(a+b)+4b'}$ segue $a'-b' < \frac{1}{2}(a-b)$, allo stesso modo sarà $a''-b'' < \frac{1}{2}(a'-b')$ ecc.[5] Da qui si conclude che *a*-*b*, *a'*-*b'*, *a''*-*b''*, *a'''*-*b'''* ecc. costituiscono una successione continuamente decrescente e che il limite della stessa è 0. Da qui $a^\infty = b^\infty$, ossia la successione superiore e quella inferiore hanno lo stesso limite, del quale la prima rimane sempre maggiore, la seconda minore.[6]

---

[1] Si tratta di ipotesi decisive; la trattazione nel caso di numeri negativi o la considerazione di radici negative porta a concetti alquanto diversi, con un grado di complicazione maggiore.

[2] Dato un verso della disuguaglianza tra i primi termini delle successioni, esso si mantiene per i corrispondenti termini successivi. Il secondo membro dell'uguaglianza infatti è positivo, il secondo fattore lo è pure e pertanto lo è il primo, dal che la conseguenza.

[3] Dal momento che *a*>*b* si ha che la media aritmetica è minore del termine maggiore (*a'*<*a*) mentre la media geometrica è maggiore del termine minore (*b'*>*b*).

[4] La prima successione è monotona decrescente, la seconda monotona crescente; entrambe sono limitate: inferiormente dallo 0 la prima e superiormente da *a* la seconda. Esse sono quindi entrambe convergenti.

[5] È infatti $\frac{a-b}{2(a+b)+4b'} < \frac{a-b}{2(a+b)} < \frac{1}{2}$.

[6] Il comportamento grafico è il seguente, dove la linea azzurra rappresenta l'andamento della successione superiore, la rossa della inferiore (segue alla pagina successiva).

Chiamiamo tale limite la *media aritmetico-geometrica di a e b* e lo indichiamo con $M(a,b)$.

2.

Le radici dell'equazione $xx - 2ax + bb = 0$ saranno reali e positive[7] a patto che $a \geq b$; la media aritmetica delle radici è a, quella geometrica b; indicata quindi una radice (quella maggiore se esse sono diverse[8]) con $'a$, l'altra con $'b$, si potrà riguardare $'a$ come il termine della successione superiore che precede il termine a e allo stesso modo $'b$ come il termine della successione superiore che precedente b. Similmente indicando

per l'equazione $xx - 2'ax + 'b'b = 0$ la radice maggiore con $''a$ e la minore con $''b$
$xx - 2''ax + ''b''b = 0$ la radice maggiore con $'''a$ e la minore con $'''b$
$xx - 2'''ax + '''b'''b = 0$ la radice maggiore con $''''a$ e la minore con $''''b$

$'a, ''a, '''a$ ecc. potranno essere visti come continuazione della prima successione verso sinistra, e $'b, ''b, '''b$ ecc. potranno essere visti come continuazione della seconda successione, di modo che abbiamo due successioni continuabili all'infinito nei due sensi

$$\ldots.''''a, '''a, ''a, 'a, a, a', a'', a''', a'''' \ldots. \qquad \text{(I)}$$

$$\ldots.''''b, '''b, ''b, 'b, b, b', b'', b''', b'''' \ldots. \qquad \text{(II)}$$

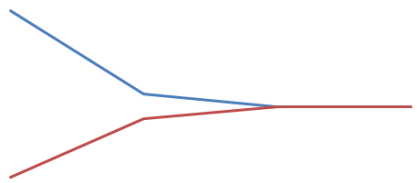
Pertanto ogni termine della successione (I) sarà maggiore del corrispondente della successione (II), la prima decresce continuamente da sinistra verso destra, la seconda cresce continuamente da sinistra verso destra. A destra entrambe le successioni hanno il medesimo limite; mentre a sinistra la (I) cresce oltre ogni limite, la (II) ha per limite 0 (a meno che entrambe le successioni siano uguali). Infatti $'a = a + \sqrt{a^2 - b^2}$; $'b = a - \sqrt{a^2 - b^2}$; da qui $'a'a - 'b'b = 4a\sqrt{aa - bb} > 4(aa - bb)$, alla stessa maniera $''a''a - ''b''b > 4(a'a' - b'b')$ ecc. dal che è chiaro che la successione $aa - bb$, $'a'a - 'b'b$, $''a''a - ''b''b$ ecc. e a maggior ragione anche a, $'a$, $''a$ ecc. può superare ogni limite; $\frac{'b}{b} = \frac{b}{'a} < \frac{b}{a}$ e così $\frac{''b}{'b} = \frac{b}{'a} < \frac{'b}{'a}$ ecc. cioè ; $\frac{^{n+1}b}{^{n}b}$ può essere resa più piccola di qualsiasi limite aumentando lo stesso n per cui il limite della serie $b, 'b, ''b$ ecc. è =0.

Dalla definizione di media aritmetico-geometrica appare talmente chiaro il seguente teorema da non richiedere ulteriore spiegazione

TEOREMA. *La media si trova tra i termini corrispondenti delle successioni I e II così come tra a e b.*

3.

A che si veda più chiaramente con quanta rapidità le successioni (I) e (II) si avvicinano a destra verso il limite e come a sinistra la prima cresca e la seconda decresca, facciamo qualche esempio:



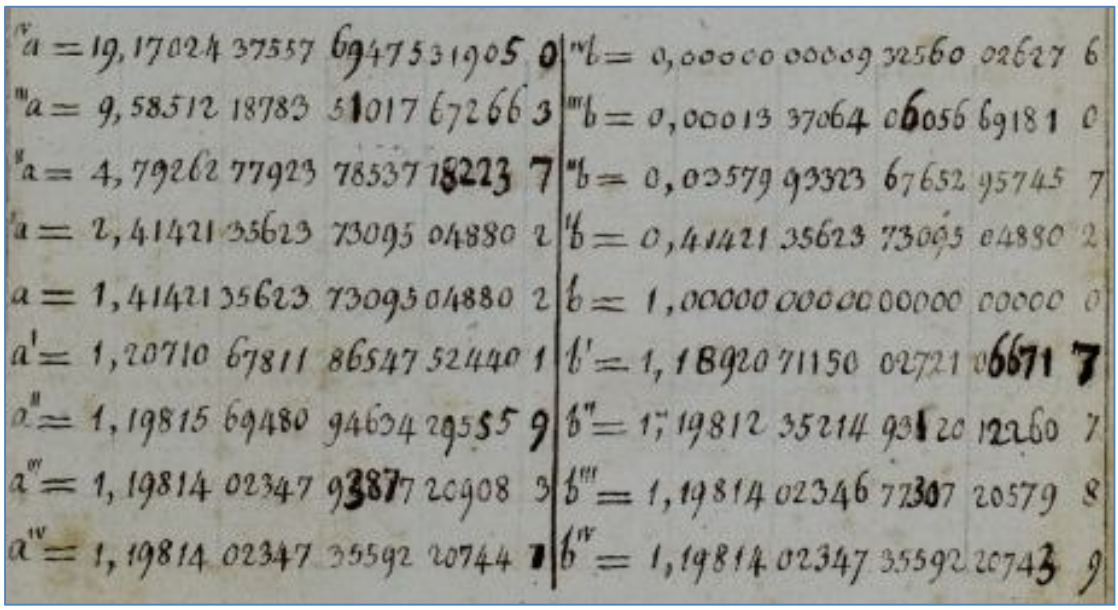
[7] Esplicitamente: $x_1 = a - \sqrt{a^2 - b^2}$; $x_2 = a + \sqrt{a^2 - b^2}$.
[8] Condizione che accade se $a \neq b$.

Esempio 1. $a = 1$, $b = 0{,}2$

$''''a =$ 15,83795 47919 02	$''''b =$ 0,00000 00000 00000 00005 7
$'''a =$ 7,91897 73959 512	$'''b =$ 0,00000 00013 481
$''a =$ 3,95948 86986 4971	$''b =$ 0,00010 30955 7682
$'a =$ 1,97979 58971 13271 23927 9	$'b =$ 0,0202041028 86728 76072 1
$a =$ 1,00000 00000 00000 00000 0	$b =$ 0,20000 00000 00000 00000 0
$a' =$ 0,60000 00000 00000 00000 0	$b' =$ 0,44721 35954 99957 93928 2
$a'' =$ 0,52360 67977 49978 96964 1	$b'' =$ 0,51800 40128 22268 36005 0
$a''' =$ 0,52080 54052 86123 66484 5	$b''' =$ 0,52079 78709 38876 24344 0
$a^{\mathrm{IV}} =$ 0,52080 16381 12999 95414 3	$b^{\mathrm{IV}} =$ 0,52080 16380 99375
$a^{\mathrm{V}} =$ 0,52080 16381 06187	$b^{\mathrm{V}} =$ 0,52080 16381 06187

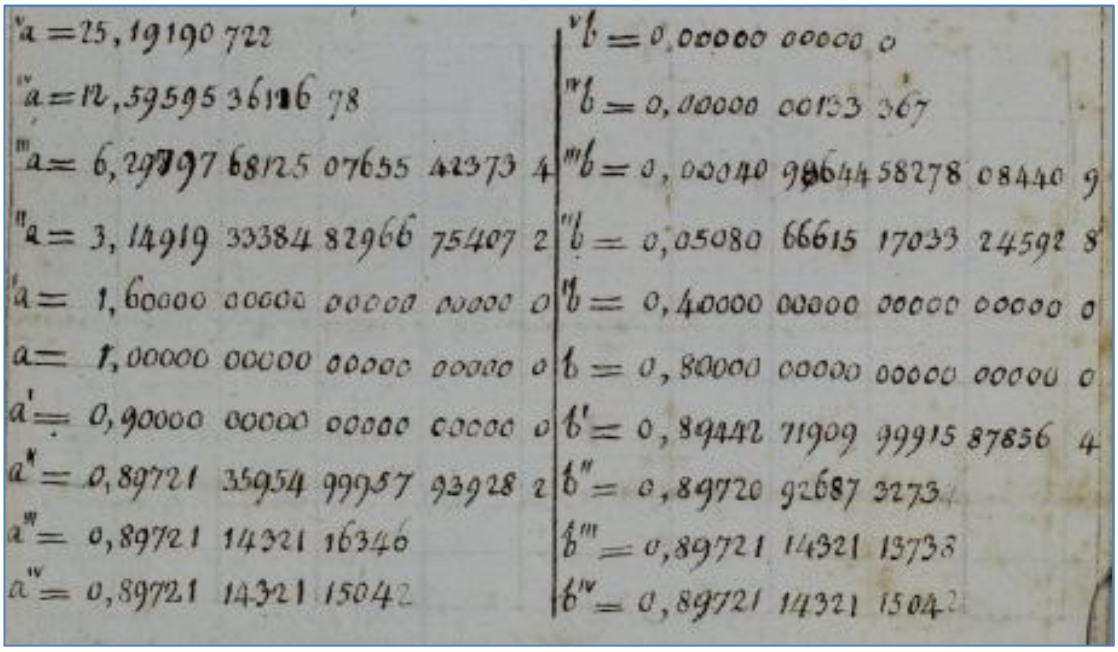
Qui a^{V}, b^{V} differiscono a partire dalla 23ª cifra; ${}^{\mathrm{V}}b$ è minore di $\left(\frac{1}{10}\right)^{40}$; $''''a$, ${}^{\mathrm{V}}a$, ${}^{\mathrm{VI}}a$ formano approssimativamente una progressione geometrica di ragione =2.[9]

Esempio 2. $a = 1$, $b = 0{,}6$

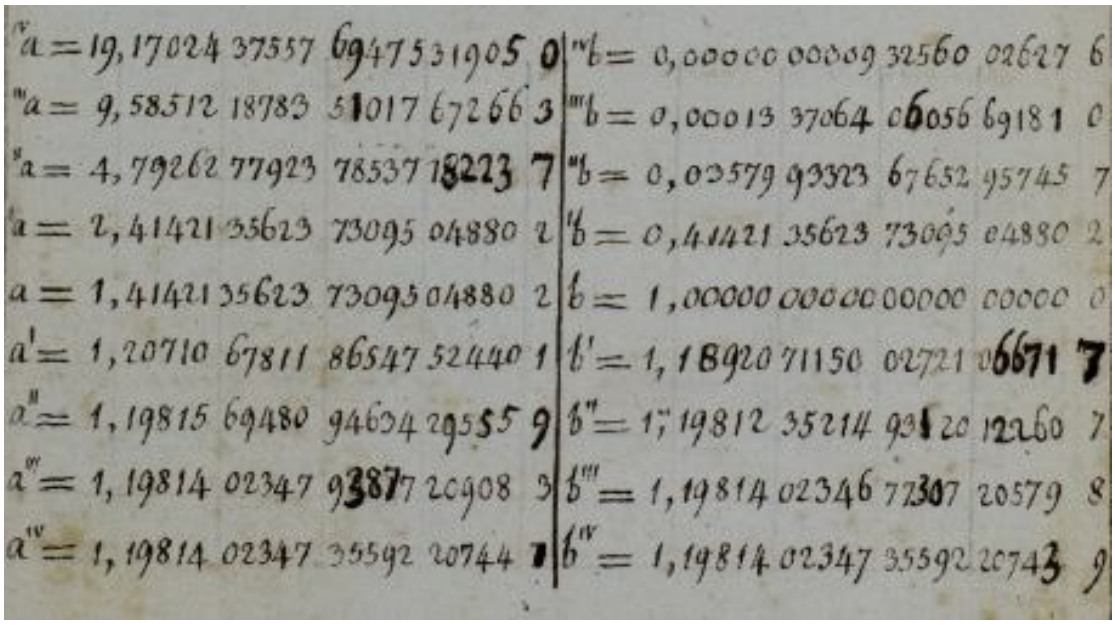


[9] Come si vede dagli esempi seguenti, questo fatto è vero sempre, indipendentemente dai valori di *a*, *b* e da quello del loro rapporto.

Esempio 3. $a = 1$, $b = 0{,}8$



Esempio 4. [10] $a = \sqrt{2}$, $b = 1$



4.

Si abbiano oltre alle successioni

$$\ldots.''''a, '''a, ''a, 'a, a, a', a'', a''', a'''' \ldots.$$
$$\ldots.''''b, '''b, ''b, 'b, b, b', b'', b''', b'''' \ldots.$$

[10] La scelta di questo esempio sappiamo oggi che non è affatto casuale, essa è infatti legata alla costante della lemniscata $\tilde{\omega}$ e a π attraverso la relazione, trovata empiricamente dall'Autore, $M(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{\tilde{\omega}}$.

le altre due

$$\ldots.''''c,'''c,''c,'c,c,c',c'',c''',c'''' \ldots.$$
$$\ldots.''''d,'''d,''d,'d,d,d',d'',d''',d'''' \ldots.$$

formate alla stessa maniera; e supponiamo che due termini nelle seconde due siano *proporzionali* ai primi, ad esempio $a:b = c:d$ oppure $a:c = b:d = 1:n$. Allora tutti i termini in (I) stanno ai termini in (III) e tutti quelli in (II) ai termini in (IV)[11] nello stesso rapporto (rispettivamente secondo la propria posizione), diciamo

$$c' = na', \qquad c'' = na'', \qquad 'c = 'an, \qquad d^{\mathrm{V}} = nb^{\mathrm{V}}, \qquad {}^{\mathrm{V}}d^{=\mathrm{V}}bn$$

Da qui si deduce facilmente che anche il limite delle successioni I, II staranno al limite delle successioni III, IV come 1 ad *n*, ovvero in genere $M(na, nb) = nM(a, b)$. sarà quindi in generale $M(a, b) = aM\left(1, \frac{b}{a}\right) = b\left(\frac{a}{b}, 1\right)$.[12]

5.

PROBLEMA. *Esprimere la media aritmetico-geometrica tra il numero* 1+*x maggiore dell'unità e l'unità per mezzo di una serie di potenze della stessa x.*

Sol. Dal momento che *M*(1,1)=1, supponiamo che

$$M(1 + x, 1) = 1 + h'x + h''x^2 + h'''x^3 + h''''x^4 + \text{ecc.}$$

in maniera che *h'*, *h''*, *h'''*, *h''''* siano coefficienti costanti non dipendenti da *x*. Sia $x = 2t + tt$, sarà

$$M(1 + x, 1) = M\left(1 + t + \frac{1}{2}tt, 1 + t\right) = (1 + t)M\left(1 + \frac{\frac{1}{2}tt}{1 + t}, 1\right)$$ [13]

Si avrà pertanto[14]

$$1 + h'(2t + tt) + h''(2t + tt)^2 + h'''(2t + tt)^3 + \text{ecc.}$$

$$= 1 + t + h'\left(\frac{1}{2}tt\right) + h''\frac{\frac{1}{4}t^4}{1+t} + h'''\frac{\frac{1}{8}t^6}{(1+t)^2} + \text{ecc.}$$

Da cui vengono le equazioni

$$2h' = 1$$

[11] (III) e (IV) in realtà non sono state definite, ma si capisce che si riferisce alle seconde due successioni delle "*c*" e delle "*d*".

[12] Appare un po' troppo laborioso il metodo per giungere al risultato voluto, che segue immediatamente dalle definizioni di media sia aritmetica che geometrica.

[13] $M(1 + x, 1) = M((1 + t)^2, 1)$ la prima iterazione su tale valore giustifica la prima uguaglianza.

[14] La prima serie si ottiene dalla posizione $x = 2t + tt$, la seconda dallo sviluppo di $M\left(1 + \frac{\frac{1}{2}tt}{1+t}, 1\right)$ moltiplicato per (1+*t*).

$$4h'' + h' = \tfrac{1}{2}h'$$

$$8h''' + 4h'' = 0$$

$$16h^{\mathrm{IV}} + 12h''' + h'' = \tfrac{1}{4}h''$$

$$32h^{\mathrm{V}} + 32h'''' + 6h''' = -\tfrac{1}{4}h''$$

$$64h^{\mathrm{VI}} + 80h^{\mathrm{V}} + 24h'''' + h''' = \tfrac{1}{4}h'' + \tfrac{1}{8}h'''$$

$$128h^{\mathrm{VII}} + 192h^{\mathrm{VI}} + 80h^{\mathrm{V}} + 8h'''' = -\tfrac{1}{4}h'' - \tfrac{2}{8}h'''$$

$$256h^{\mathrm{VIII}} + 448h^{\mathrm{VII}} + 240h^{\mathrm{VI}} + 40h^{\mathrm{V}} + 8h'''' = \tfrac{1}{4}h'' + \tfrac{3}{8}h''' + \tfrac{1}{16}h^{\mathrm{IV}}$$

ecc. dal che è

$$h' = \tfrac{1}{2}, \qquad h'' = -\tfrac{1}{16}, \qquad h''' = \tfrac{1}{32}, \qquad h^{\mathrm{IV}} = -\tfrac{21}{1024}, \qquad h^{\mathrm{V}} = \tfrac{31}{2048}, \qquad h^{\mathrm{VI}} = -\tfrac{195}{16384}$$

Per tale motivo

$$M(1+x,1) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}xx + \frac{1}{32}x^3 - \frac{21}{1024}x^4 + \frac{31}{2048}x^5 - \frac{195}{16384}x^5 \text{ ecc.}$$

Senza sforzo si vedrà inoltre che la media tra 1 e il numero minore dell'unità 1-*x* sarà

$$1 + h'x + h''^{x^2} + h'''^{x^3} + \text{ecc.} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{16}xx - \tfrac{1}{32}x^3 - \tfrac{21}{1024}x^4 - \text{ ecc.}$$

6.

PROBLEMA. *Esprimere la media aritmetico-geometrica tra* 1+*x e* 1-*x per mezzo di una serie di potenze della stessa x.*

Sol. Dal momento che si ha

$$M(1+x,1-x) = (1-x)M\left(1 + \frac{2x}{1-x}, 1\right)$$

si ha immediatamente, dalla serie dell'articolo precedente ove si sostituisca $\frac{2x}{1-x}$ in luogo di *x*

$$M\left(1 + \tfrac{2x}{1-x}, 1\right) = 1 + x + \tfrac{3}{4}xx + \tfrac{3}{4}x^3 + \tfrac{43}{64}x^4 + \tfrac{43}{64}x^5 + \tfrac{161}{256}x^6 + \text{ecc.}$$

e di qui

$$M(1+x,1-x) = 1 - \frac{1}{4}xx - \frac{5}{64}x^4 - \frac{11}{256}x^6 \text{ ecc.}$$

I coefficienti di questa serie si possono anche ricavare indipendentemente dall'articolo precedente mediante il seguente metodo. Si ponga $x = \frac{2t}{1+tt}$ e sarà

$$M(1+x, 1-x) = M\left(\frac{1-tt}{1+tt}, 1\right) = \frac{1}{1+tt} M(1+tt, 1-tt)$$[15]

Per tale fatto, ipotizzando

$$M(1+x, 1-x) = 1 + \alpha xx + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 + \text{ ecc.}$$

(infatti è chiaro che le potenze della *x* con esponente dispari per natura non ci sono) s'avrà

$$(1+tt)\left\{1 + \alpha\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^2 + \beta\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^4 + \gamma\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^6 + \delta\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^8 + \text{ecc.}\right\}$$

$$= 1 + \alpha t^4 + \beta t^8 + \gamma t^{12} + \delta t^{16} + \text{ecc.}$$

Da cui hanno luogo le equazioni

$1 + 4\alpha = 0$	da cui	$\alpha = -\frac{1}{4}$
$-4\alpha + 16\beta = \alpha$		$\beta = -\frac{5}{64}$
$4\alpha - 48\beta + 64\gamma = 0$		$\gamma = -\frac{11}{256}$
$-4\alpha + 96\beta - 320\gamma + 256\delta = \beta$		$\delta = -\frac{29}{1024} - \frac{5}{13684} = -\frac{469}{13684}$
ecc.		ecc.

Neppure in questa serie i coefficienti sono soggetti ad una legge semplice[16]: ma se si divide l'unità per tale serie viene fuori

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)} = 1 + \frac{1}{4}xx + \frac{9}{64}x^4 + \frac{25}{256}x^6 + \frac{1225}{16384}x^8 + \text{ ecc.}$$

dove già ad un primo sguardo vediamo che i coefficienti sono i quadrati delle radici $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}$ e quindi proseguono secondo una legge molto semplice.[17] Ma il metodo col quale siamo giunti a questa conclusione bellissima ha soltanto la forza della induzione; pertanto ci proponiamo di giungerne al grado di certezza nelle ricerche seguenti.

---

[15] La prima uguaglianza segue dalla posizione fatta, che dà $M(1+x, 1-x) = M\left(\frac{(1+t)^2}{1+t^2}, \frac{(1-t)^2}{1+t^2}\right)$ che, alla prima iterazione di calcolo della media, restituisce $M\left(1, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = M\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, 1\right)$ per la simmetria dell'algoritmo rispetto ai suoi argomenti, fatto utilizzato anche per invertire gli argomenti dell'ultimo termine.

[16] Si intende una legge di formazione generale dei coefficienti della serie.

[17] Meraviglia delle meraviglie, Gauss sembra essere diventato Eulero. Ma …

7.

Supponendo

$$\frac{1}{M(1+x,1-x)} = 1 + Axx + Bx^4 + Cx^6 + \text{ ecc.}$$

e, come nell'articolo precedente, $x = \frac{2t}{1+tt}$ abbiamo

$$1 + A\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^2 + B\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^4 + C\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^6 + D\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^8 + \text{ecc.}$$

$$= 1 + tt + At^4 + At^6 + Bt^8 + Bt^{10} + Ct^{12} + Ct^{14} + Dt^{16} + Dt^{18} + \text{ecc.}$$

donde provengono le equazioni[18]

$$4A = 1$$

$$-8A + 16B = A$$

$$12A - 64B + 64C = A$$

$$-16A + 160B - 384C + 256D = B \quad \text{ecc.}$$

e da qui $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}$, $C = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}$, $D = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{49}{64}$ come sopra: ma la ragione della legge è ora stata dedotta con maggior fatica: per tale motivo preferiamo il metodo seguente. Dall'equazione

$$\frac{2t}{1+tt} + A\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^3 + B\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^5 + \text{ecc.} = 2t(1 + At^4 + Bt^8 \ldots)$$

seguono le seguenti equazioni

$$1 = 1 \qquad [1]$$
$$0 = 1 - 4A \qquad [2]$$
$$A = 1 - 12A + 16B \qquad [3]$$
$$0 = 1 - 24A + 80B - 64C \qquad [4]$$
$$B = 1 - 40A + 240B - 448C + 256D \qquad [5]$$
$$0 = 1 - 60A + 560B - 1792C + 2304D - 1024E \qquad [6]$$

ecc.

ove i coefficienti facilmente si riconducono ad una formula generale: ovvero l'equazione *n*-sima sarà[19]

---

[18] Lo sviluppo in serie di potenze di $1 + A\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^2 + B\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^4 + C\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^6 + \cdots$ è $1 + 4At^2 + (16B - 8A)t^4 + (64C - 64B + 12A)x^6 + \cdots$ che va uguagliato alla seconda serie.

[19] L'Autore scrive tutti i prodotti senza l'uso di parentesi, ad esempio dice $n.n - 1$, qui si è preferito impiegarle, anche se il senso è già chiaro nell'originale.

$$M = 1 - 4A \times \frac{n.(n-1)}{1.2} + 16B \times \frac{(n+1).n.(n-1).(n-2)}{1.2.3.4} - 64B \times \frac{(n+2).(n+1).n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4.5.6}$$
$$+ 256D \times \frac{(n+3).(n+2).(n+1).n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \text{ecc.}$$

dove M sarà =0 (quando n è pari) oppure è uguale al termine $\frac{1}{2}(n+1)$-simo della successione 1, A, B, C, D ecc. (quando n è dispari). Ora da queste equazioni deduciamo le seguenti nuove [20]

[2]	$0 = 1 - 4A$
4[3]-[1][21]	$4A - 1 = 3 - 48A + 64B$
9[4]-4[2]	$0 = 5 - 200A + 720B - 576C$
16[5]-9[3]	$16B - 9A7 - 532A + 3696B - 7168C + 4096D$
25[6]-16[4]	$0 = 9 - 1116A + 12720B - 43776C + 57600D - 25600E$

ecc. dove i coefficienti sono assoggettabili facilmente ad una legge generale. Ovvero l'equazione n-sima sarà

$$nnN - (n-1)^2 L = (2n-1)\left(\begin{array}{c} 1 - 4A \times \frac{3nn-3n-2}{1.2} + 16B \times \frac{n.(n-1).(5nn-5n+6)}{1.2.3.4} \\ -16C \times \frac{(n+1).n.(n-1).(n-2)(7nn-7n+12)}{1.2.3.4.5.6} \\ +64D \times \frac{(n+2).(n+1).n.(n-1).(n-2).(n-3)(9nn-9n+20)}{1.2.3.4.5.6} - \text{ecc.} \end{array}\right) \quad (22)$$

dove l'andamento dei fattori è ovvio (ovvero accanto ai fattori lineari[23] nei singoli coefficienti interviene il seguente fattore trinomio $knn - kn + \frac{1}{4}(kk-1)$). Queste equazioni si trasformano in maniera più semplice nel seguente modo, sdoppiati i termini a destra di ciascuna (a meno della prima, che resta immutata):

$$0 = 1 - 4A$$

$$4A - 1 = \{3 - 36A - 12A + 64B\}$$

$$0 = \{5 - 180A + 400B - 20A + 320B - 576C\}$$

$$16B - 9A = \{7 - 504A + 2800B - 3136C - 28A + 896B - 4032C + 4096D\}$$

$$0 = \{9 - 1080A + 10800B - 28224C + 20736D - 36A + 1920B - 15552C + 36864D - 25600E\}$$

---

[20] La determinazione del segno è spiegata nelle *Disquisitiones Arithmeticae*, art. 162 (NdA).

[21] La scrittura significa 4 volte l'equazione [3] meno l'equazione [1] e così per le altre.

[22] L ed N qui o sono entrambi =0 (quando n è dispari) o rispettivamente uguali ai termini $\frac{1}{2}n$-simo o $\frac{1}{2}n+1$-simo della sequenza 1, A, B, C, D, E ecc. (NdA).

[23] I termini "lineare" e "trinomio" nell'originale sono gli euleriani *simplices* e *duplex*.

cioè in generale l'equazione *n*-sima

$$nnN-(n-1)^2L$$
$$=(2n-1)\Big\{1-3.4A\frac{n.(n-1)}{1.2}+5.16B\frac{(n+1)n.(n-1).(n-2)}{1.2.3.4}-7.64\,C\frac{(n+2).(n+1)\ldots(n-3)}{1.2.3.4.5.6}$$
$$-4A\frac{2}{1.2}\quad+\quad 16B\frac{n.(n-1).16}{1.2.3.4}\quad-\quad 64C\frac{(n+1).n.(n-1).(n-2).2.54}{1.2.3.4.5.6}$$

$$\ldots\pm k.2^{k-1}K\frac{\left(n+\frac{k-3}{2}\right).\left(n+\frac{k-5}{2}\right).\left(n+\frac{k-7}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{k-1}{2}\right)}{1.2.3\ldots.(k-1)}\ldots$$
$$\ldots\pm 2^{k-1}K\frac{\left(n+\frac{k-5}{2}\right).\left(n+\frac{k-7}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{k-73}{2}\right)\frac{1}{4}(k-1)^3}{1.2\ldots(k-1)}\ldots\Big\}$$

con *k* che indica una qualsiasi quantità dispari, siano così

$$0=1-4A$$

$$4A-1=3(1-4A)-4(9A-16B)$$

$$0=5(1-4A)-20(9A-16B)+18(25B-36C)$$

$$16B-9A=7(1-4A)-56(9A-16B)+112(25B-36C)-94(49C-64D)$$

$$0=9(1-4A)-120(9A-16B)+432(25B-36C)-576(49C-64D)+256(81D-100E)$$

ed in generale l'equazione *n*-sima

$$nnN-(n-1)^2L$$
$$=(2n-1)(1-4A)-4\frac{(2n-1).n.(n-1)}{1.2.3}(9A-16B)+10\frac{(2n-1).(n+1).n.(n-1).(n-2)}{1.2.3.4.5}(25B-36C)$$
$$-64\frac{(2n-1).(n+2).n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4.5.6.7}(49C-64D)+\text{ecc.}$$

dove la chiara generalità della legge emerge spontaneamente dal calcolo. Da qui in effetti è naturale che sarà necessario che

$$0=1-4A,\quad 0=9A-16B,\qquad 0=25B-36C,\qquad 0=49C-64D,\qquad 0=81D-100E,$$

e così di seguito per cui

$$A=\frac{1}{4},\quad B=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16},\quad C=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36},\quad D=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{49}{64},\quad E=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{49}{64}\cdot\frac{81}{100}$$

e così via all'infinito. C.D.D.[24]

8.

Se poniamo

[24] Il sapore è del tutto euleriano, quindi il Q.E.D. appare un po' ardito.

$$1+\frac{1}{4}xx+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^4+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}x^6+\text{ecc.}=y$$

viene

$$\frac{1}{2}xx+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{4}x^4+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{6}x^6+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{49}{8}x^6+\text{ecc.}=\frac{xdy}{dx}$$

e

$$xx+\frac{1}{4}\cdot 9x^4+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot 25x^6+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot 49x^6+\text{ecc.}=\frac{xxddy}{dx^2}+\frac{xdy}{dx}$$

donde segue naturalmente

$$\frac{xxddy}{dx^2}+3\frac{xdy}{dx}+y=\frac{1}{xx}\left(\frac{xxddy}{dx^2}+\frac{xdy}{dx}\right)$$

ossia

$$(x^3-x)\frac{ddy}{dx^2}+(3xx-1)\frac{dy}{dx}+xy=0$$

E così in tal modo abbiamo ricondotto la nostra media aritmetico-geometrica a quantità integrali, che forniscono una soluzione particolare di questa equazione differenziale.[25]

L'integrale generale di questa equazione è $\frac{A}{M(1+x,1-x)}+\frac{B}{M(1,x)}$.[26]

Sia φ un angolo generico e sia il valore dell'integrale $\int\cos\varphi^2\,d\varphi$ [27] da $\varphi=0$ fino a $\varphi=\pi$, come noto a tutti, $=\frac{1}{2}\pi$; allo stesso modo sia il valore dell'integrale $\int\cos\varphi^4\,d\varphi$ tra gli stessi estremi $=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi$; il valore dell'integrale[28] $\int\cos\varphi^6\,d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\pi$ ecc. ed infine, come è immediatamente chiaro, $\int d\varphi=\pi$. Da qui si vede che il valore dell'integrale

$$\int d\varphi\times\left(1+\frac{1}{2}x^2\cos\varphi^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4\cos\varphi^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6\cos\varphi^6+\text{ecc.}\right)$$

ovvero di questo $\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-xx\cos\varphi^2}}$ è $=\pi y$,[29] se si assume calcolato da $\varphi=0$ fino a $\varphi=\pi$, considerando la quantità x come una costante.

---

[25] Il testo dice *differentio-differentialis*. L'integrale particolare ossia $\frac{1}{M(1+x,1-x)}$ passa per i punti (0,1) e (1,∞).

[26] Non viene data alcuna spiegazione di questa affermazione

[27] L'esponente, qui come in seguito, si riferisce al coseno e non all'argomento: $\cos\varphi^2$ indica $(\cos\varphi)^2$.

[28] Sempre tra gli stessi estremi.

[29] Guardiamo a solo titolo di esempio il coefficiente della quarta potenza: $\int_0^\pi\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4\cos\varphi^4\,d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi x^4$ che è esattamente uguale al termine di quarto grado dello sviluppo in serie di $\frac{\pi}{M(1+x,1-x)}$. Si tratta di un risultato meraviglioso:

Se si suppone la funzione $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-xx\cos\varphi^2}}$ sviluppata nella seguente serie,

$$P + 2Q\cos 2\varphi + 2R\cos 4\varphi + 2S\cos 6\varphi + \text{ecc.}$$

di modo che i coefficienti *P*, *Q*, *R*, *S* ecc. dipendano esclusivamente da *x*: il valore dell'integrale generale suddetto sarà

$$P\varphi + Q\sin 2\varphi + \frac{1}{2}R\sin 4\varphi + \frac{1}{3}S\sin 6\varphi + \text{ecc.+Cost.}$$

e così il valore tra quei limiti sarà $= P\varphi$,[30] dal che $y = P$. Abbiamo già osservato che essendo $\frac{1}{y} = M(1+x, 1-x)$ sarà pure $\frac{1}{y} = M(1, \sqrt{1-xx})$.[31] Da qui si deduce facilmente il seguente teorema generale: Se l'espressione $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\gamma\cos\varphi^2}} = W$ viene sviluppata in serie di coseni degli angoli 2φ, 4φ, 6φ ecc., e il cui termine costante viene indicato con *P*, allora i valori massimo e minimo dello stesso W (ovvero $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\gamma}}$ e $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$) di indicheranno con v e v': sarà $\frac{1}{P}$ la media aritmetico-geometrica di $\frac{1}{v}$ e $\frac{1}{v'}$. I ragionamenti precedenti valgono a rigore solamente nei casi in cui γ è una quantità positiva: ma si estendono facilmente anche ai casi in cui γ è negativa. In tal caso infatti è $W = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\gamma+\gamma\cos\psi^2}}$ se si pone $\psi = 90 - \varphi$; dal che $\frac{1}{P}$ è la media tra $\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$ e $\frac{\sqrt{\beta-\gamma}}{\alpha}$ come prima. Inoltre è chiaro, senza sforzo che il medesimo teorema senza alcun cambiamento si estende anche a espressioni come $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta+\gamma\cos\varphi}}$ di modo che $\frac{1}{Term.Cost.}$ diventa

$$= M\left(\frac{1}{\text{valore max}}, \frac{1}{\text{valore min}}\right) = M\left(\frac{\sqrt{\beta-\gamma}}{\alpha}, \frac{\sqrt{\beta+\gamma}}{\alpha}\right)$$

tali funzioni infatti si riconducono alla forma $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\gamma+2\gamma\cos\psi^2}}$, della quale abbiamo già detto a lungo, laddove si ponga $\varphi = 2\psi$. [(32)]

Avvertiamo infine che nelle dimostrazioni che seguono verrà data una dimostrazione molto più generale di quei teoremi da principi molto più naturali; inoltre faremo vedere subito anche come calcolare gli altri coefficienti *Q*, *R*, *S* ecc. mediante metodi altrettanto rapidi. Questa discussione ha qui avuto una certa utilità di modo che queste ricerche risultino più care a coloro che comunque non conoscono la bellezza e il divino fascino delle verità eterne, e hanno imparato a stimare mediante il solo valore della loro utilità le scienze matematiche applicate. Nessuno ignora infatti quanto grande sia infatti l'utilità di uno sviluppo veloce dei coefficienti *P*, *Q*, *R*, *S* ecc. come quello che deriva da tali principi, nella fisica astronomica come nella teoria delle perturbazioni dei pianeti.

---

non solo il reciproco della media aritmetico-geometrica viene sviluppato in serie, ma anche correlato all'integrale ellittico di prima specie: $\frac{\pi}{M(1+x,1-x)} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-xx\cos\varphi^2}}$.

[30] La serie dei coseni è pari, il suo integrale di seni dispari, se si calcola tra gli estremi 0 e π resta solo il termine noto.

[31] Si tratta della prima iterazione aritmetico-geometrica.

[(32)] Inoltre dalle cose precedenti segue naturalmente che se sono formate varie espressioni $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta+\gamma\cos\varphi}}$ tali che il loro valore sia lo stesso negli estremi: i termini costanti che vengono dal loro sviluppo saranno necessariamente uguali, anche se tutti i restanti coefficienti sono molto diversi tra loro.

PARTE SECONDA

SULLE FUNZIONI TRASCENDENTI CHE HANNO ORIGINE DALLA DIFFERENZIAZIONE DELLE MEDIE ARITMETICO-GEOMETRICHE.

9.

Siano

$$\begin{cases} x,\ x', x'', x''' \dots & \text{(I)} \\ y,\ y', y'', y''' \dots & \text{(II)} \end{cases}$$

due successioni formate come quelle dell'art. 1, ovvero in modo che ciascun termine in $\left\{\begin{matrix}\text{I}\\ \text{II}\end{matrix}\right\}$ sia la media $\left\{\begin{matrix} aritmetica \\ geometrica \end{matrix}\right\}$ dei due termini precedenti e quindi $x^\infty = y^\infty = M(x,y)$: è chiaro che tutte queste quantità come pure il loro limite è una funzione delle due variabili *x*, *y* e che esso cambi contestualmente al variare dell'uno o dell'altro. Discuteremo qui delle sole variazioni infinitamente piccole. È così

$$dx' = \tfrac{1}{2}dx + \tfrac{1}{2}dy, \quad dy' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{y}{x}}dx + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{x}{y}}dy = \tfrac{1}{2}\tfrac{y'}{x}dx + \tfrac{1}{2}\tfrac{y'}{y}dy$$ [33]

e pure

$$dx'' = \tfrac{1}{2}dx' + \tfrac{1}{2}dy', \qquad dy'' = \tfrac{1}{2}\tfrac{y''}{x'}dx' + \tfrac{1}{2}\tfrac{y''}{y'}dy' \quad \text{ecc.}$$

In questo modo si possono esprimere i differenziali di tutti i termini in I e II mediante i differenziali delle quantità *x*, *y*: ma di qui emergerebbe un legge per le successioni molto oscura. Per renderla invece molto chiara utilizziamo le seguenti notazioni. Scriviamo

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = f, \quad \frac{dx'}{x'} + \frac{dy'}{y'} = f', \quad \frac{dx''}{x''} + \frac{dy''}{y''} = f'' \quad \text{ecc.}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = g, \quad \frac{dx'}{x'} - \frac{dy'}{y'} = g', \quad \frac{dx''}{x''} - \frac{dy''}{y''} = g'' \quad \text{ecc.}$$

dal che discende subito

$$f' = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{x'} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{x'} + \frac{dy}{y}\right) = f + \frac{1}{2}\frac{dx}{xx'}(x - x') + \frac{1}{2}\frac{dy}{yx'}(y - x')$$
$$= f + \frac{1}{2}\frac{dx}{xx'}(x - x') - \frac{1}{2}\frac{dy}{yx'}(x - x') = f + \frac{1}{2}g\frac{x - x'}{x'}$$

e quindi in maniera simile

$$f'' = f' + \frac{1}{2}g'\frac{x' - x''}{x''}, \quad f''' = f'' + \frac{1}{2}g''\frac{x'' - x'''}{x'''} \quad \text{ecc.}$$

---

[33] La prima uguaglianza discende dalla differenziazione diretta di $y' = \sqrt{xy}$, la seconda si ottiene moltiplicando i denominatori sotto radice rispettivamente per *x* e per *y*.

È inoltre

$$g' = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{x'} - \frac{dx}{x} + \frac{dy}{x'} - \frac{dy}{y}\right) = \frac{1}{2}\frac{dx}{xx'}(x - x') + \frac{1}{2}\frac{dy}{yx'}(y - x') = \frac{1}{2}g\frac{x - x'}{x'}$$

e allo stesso modo $g'' = \frac{1}{2}g'\frac{x'-x''}{x''}$, $g''' = \frac{1}{2}g''\frac{x''-x'''}{x'''}$ ecc.

Appare chiaro inoltre da qui che è $f' = f + g'$, $f'' = f + g' + g''$, $f''' = f + g' + g'' + g'''$ ecc. Senza difficoltà si vede che la successione $\frac{g'}{g}$, $\frac{g''}{g}$, $\frac{g'''}{g}$ ecc. decresce molto rapidamente oltre ogni limite, per cui avremo mediante una serie infinita rapidamente convergente

$$f^{\infty} = f + g\left\{\frac{1}{2}\frac{x-x'}{x'} + \frac{1}{4}\frac{x-x'}{x'}\cdot\frac{x'-x''}{x''} + \frac{1}{8}\frac{x-x'}{x'}\cdot\frac{x'-x''}{x''}\cdot\frac{x''-x'''}{x'''} + \text{ecc.}\right\},\ g^{\infty} = 0\ ;$$

donde

$$\frac{2dx^{\infty}}{x^{\infty}} = \frac{2dy^{\infty}}{y^{\infty}} = \frac{2dM(x,y)}{M(x,y)}$$
$$= \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \left\{\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right\} \times \left\{\frac{1}{2}\frac{x - x'}{x'} + \frac{1}{4}\frac{x - x'}{x'}\cdot\frac{x' - x''}{x''} + \text{ecc.}\right\}$$

ovvero

$$dM(x,y) = M(x,y) \times \left\{\frac{dx}{x} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{x - x'}{x'} + \frac{1}{8}\frac{x - x'}{x'}\cdot\frac{x' - x''}{x''} + \text{ecc.}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{dy}{y} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{x - x'}{x'} - \frac{1}{8}\frac{x - x'}{x'}\cdot\frac{x' - x''}{x''} - \text{ecc.}\right)\right\}$$

Rendiamo il calcolo sensibilmente più semplice nel modo seguente: sia

$$\frac{x-x'}{x'} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x-y)^2}{xx-yy} = \frac{(x+y)^2-4xy}{xx-yy} = 4\frac{x'x'-y'y'}{xx-yy}\ (34)$$

dal che viene

$$dM(x,y) = \frac{M(x,y)}{2(xx-yy)} \times \left\{\frac{dx}{x} \times (xx - yy + 2(x'x' - y'y') + 4(x''x'' - y''y'') + 8(x'''x''' - y'''y''') \ldots.)\right.$$
$$\left. + \frac{dy}{y} \times (xx - yy - 2(x'x' - y'y') - 4(x''x'' - y''y'') - 8(x'''x''' - y'''y''') \ldots.)\right\}^{35}$$

---

(34) E quindi $\frac{x'-x''}{x''} = 4\frac{x''x''-y''y''}{x'x'-y'y'}$, $\frac{x''-x'''}{x'''} = 4\frac{x'''x'''-y'''y'''}{x''x''-y''y''}$ ecc. (NdA).

35 Data la proprietà moltiplicativa di M, si può sempre supporre x=1 e y<1 per cui $dM(1,y) = \frac{M(1,y)}{2(1-yy)} \times \frac{dy}{y} \times (1 - yy - 2(x'x' - y'y') - 4(x''x'' - y''y'') - \cdots)\}$. L'espressione mostra che la derivata tende all'infinito quanto y va a zero.

Per rendere semplicissimo il calcolo mediante logaritmi, sviluppiamo le seguenti formule; dall'algoritmo delle successioni I, II viene naturalmente:

$$(x'x' - y'y') = \frac{(xx - yy)^2}{16x'x'}, \quad (x''x'' - y''y'') = \frac{(x'x' - y'y')^2}{16x''x''} \text{ ecc.}$$

che mostrano subito con quanta rapidità le nostre serie debbano convergere.

Se si preferisce si possono utilizzare anche le formule seguenti:

$$x'x' - y'y' = \frac{1}{4}(x - y)^2, \qquad x''^{x''} - y''y'' = \frac{1}{4}(x' - y')^2 \text{ ecc.}$$

10.

Gli esempi che seguono mostreranno la velocità di convergenza di queste serie:

I. Sia $x = \sqrt{2}$, $y = 1$ (vedasi l'art. 3). Qui si avrà $xx - yy = 1$

$$\begin{aligned}
&2(x'x' - y'y') = \tfrac{1}{2}(x - y)^2 && = 0{,}0857864376\ \ 2690\\
&4(x''x'' - y''y'') = (x' - y')^2 && = 0{,}0003203980\ \ 4927\\
&8(x'''x''' - y'''y''') = 2(x'' - y'')^2 && = 0{,}0000000022\ \ 3462\\
&16(x''''x'''' - y''''y'''') = 4(x''' - y''')^2 = 0, && \\
& && \text{Somma} = 0{,}0861068379\ \ 10
\end{aligned}$$

Da qui è $dM(x, y) = M(x, y) \times \left\{\frac{dx}{2\sqrt{2}} \times 1{,}0861068379 \ldots + \frac{dy}{2} \times 0{,}9138931621 \ldots\right\}$ ossia, in numeri, $= dx \times 0{,}46008 \ldots + dy \times 0{,}547486089$.

II. Incompleto, tratta della distanza massima e minima tra Giove e Cerere.