Su particolari proprietà della curva elastica rappresentata dall'equazione

$$y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{1-x^4}}$$

L. Euler – *Acta academiae scientiarum Petropolitanae* 2, 1781, 34-61

Traduzione e note di Carmine Suriano

[Par.1-4] Si abbia una lamina elastica vincolata ai propri punti estremi e costretta ad incurvarsi in maniera retta[1] per trazione tra essi, allora essa assumerà la forma

$$y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Allora sarà

$$dy = \frac{xxdx}{\sqrt{1-x^4}}$$ [2]

e l'elemento di arco

$$ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{x^4dx^2}{1-x^4} + dx^2 = \frac{dx^2}{1-x^4}$$ [3]

Con riferimento alla figura che segue abbiamo le seguenti immediate relazioni:

CP=x

PM=y

CB=AD=1

AB=CD=a

arco CMA=c

arco CM=s

QN=$x/\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^4}}{x}$

normale MN =$x/\frac{dy}{ds} = \frac{1}{x}$

MQ.MN =1

sinΦ=x^2

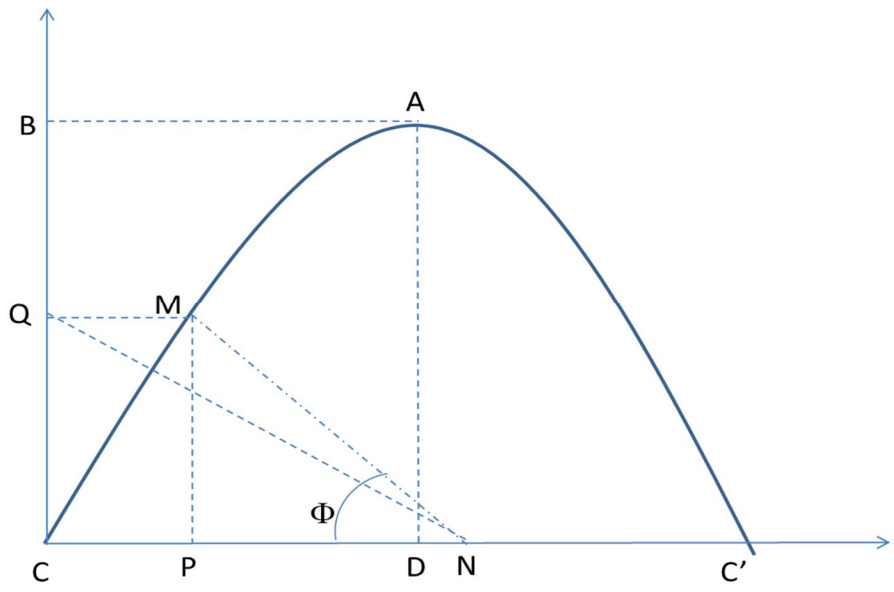
[1] Si intende rispetto all'asse delle ascisse, con il quale la curva forma un angolo retto alle estremità.

[2] Si può verificare che la funzione $y(x)$ soddisfa l'equazione differenziale $xy' = 2y + 2y^3$.

[3] Ne discende che $ds = \frac{dy}{x^2}$.

cosΦ= $\sqrt{1-x^4}$

tanΦ= $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{dx}$



[Par.5] Ci chiediamo ora quale sia il raggio del cerchio osculatore della curva nel punto M. A tal fine poniamo

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}$$

da cui

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$$

e

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = x^2 = q$$

per cui il raggio del cerchio osculatore MO è[4]

$$\frac{dx}{dq} = \frac{1}{2x}$$

che è la metà del segmento di normale MN, per cui il centro O del cerchio osculatore è il punto medio di tale segmento di normale in M alla curva elastica. La curvatura è massima in A, dove il raggio vale ½ ed è minima in C dov'è nulla.

[Par.6] Vediamo ora come si possano esprimere tanto l'ordinata[5] y quanto l'arco s in funzione dell'ascissa x attraverso serie infinite.

È opportuno innanzitutto scrivere lo sviluppo in serie

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = (1-x^4)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^8 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}x^{16} + \cdots$$

dal quale, integrando[6] abbiamo

$$\text{PM}=y = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{11}x^{11} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{15}x^{15} + \cdots$$

come pure

$$\text{CM}=s = x + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{9}x^9 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{13}x^{13} + \cdots$$

Se x assume valori molto piccoli avremo l'ordinata che vale $x^3/3$ e l'arco che vale x. Se invece x=1 abbiamo gli sviluppi in serie per a e c:

$$a = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{11} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{15} + \cdots$$

$$c = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{13} + \cdots$$

[Par.7] Queste serie però convergono troppo lentamente per poter fornire valori numerici buoni. Un altro metodo, meno ovvio, è quello di scrivere

---

[4] Si tratta della espressione che oggi scriviamo come $\frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}$

[5] Eulero la chiama "applicata".

6 Dopo aver moltiplicato la serie per x^2.

$$y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{1-x^4}} = u\sqrt{1-x^4}$$

derivando otteniamo una equazione differenziale per $u(x)$:

$$\frac{du}{dx}(1-x^4) - 2ux^3 - x^3 = 0$$

Supponiamo ora che

$$u = \alpha x^3 + \beta x^7 + \gamma x^{11} + \delta x^{15} + \varepsilon x^{19} + \cdots$$

Allora, sostituendo nella precedente ed uguagliando i termini simili avremo le espressioni di α, β, γ, δ, ε, … ed infine che

$$y = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}x^7 + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}x^{11} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{13}{15}x^{15} + \cdots\right)\sqrt{1-x^4}$$

[Par.8] In maniera simile se

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = v\sqrt{1-x^4}$$

derivando otteniamo una equazione differenziale per $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx}(1-x^4) - 2vx^3 - 1 = 0$$

Supponiamo ora che

$$v = \alpha x + \beta x^5 + \gamma x^9 + \delta x^{13} + \varepsilon x^{17} + \cdots$$

Allora, sostituendo nella precedente ed uguagliando i termini simili avremo le espressioni di α, β, γ, δ, ε, … ed infine che

$$s = \left(x + \frac{3}{5}x^5 + \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}x^9 + \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{13}x^{13} + \cdots\right)\sqrt{1-x^4}$$

[Par.9] Le espressioni così ottenute però hanno il fattore irrazionale che si annulla in x=1 mentre la serie diverge, pertanto non consentono il calcolo di a e c.

Conviene allora scrivere

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{(1+x^2)^{-1/2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

e sviluppare il numeratore in serie, che è

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}x^8 - \cdots$$

di modo che

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}x^8 - \cdots\right)$$

E tanto l'integrale per *y* quanto quello per *s* conterranno le espressioni

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$$

e così via.

[Par.10] Possiamo integrare tra 0 e 1 ed ottenere[7]

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{\pi}{2}$$ [8]

---

[7] Si veda la nota 12.

[8] Oggi scriviamo $\int \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}$

Per esprimere a e c come funzioni di $\pi/2$:

$$a = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5}{6} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7}{8} + \cdots\right)$$

$$s = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2} - \cdots\right)$$

che sono parimenti lente nella convergenza.

[Par.11] Diamo allora succintamente un metodo per esprimere tali valori attraverso prodotti infiniti. Si consideri

$$z = x^n\sqrt{1 - x^4}$$

differenziamo

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1}\sqrt{1 - x^4} - \frac{2x^{n+3}}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{nx^{n-1} - (n+2)x^{n+3}}{\sqrt{1 - x^4}}$$

e re-integrando

$$\int nx^{n-1}\sqrt{1 - x^4} = n\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1 - x^4}}dx - (n+2)\int \frac{x^{n+3}}{\sqrt{1 - x^4}}dx$$

Integrando[9], come vogliamo, tra 0 e 1 abbiamo

$$\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1 - x^4}}dx = \frac{n+2}{n}\int \frac{x^{n+3}}{\sqrt{1 - x^4}}dx$$

che è una ricorrenza, il cui primo termine è

$$\int \frac{x^{n+3}}{\sqrt{1 - x^4}}dx = \frac{n+6}{n+4}\int \frac{x^{n+7}}{\sqrt{1 - x^4}}dx$$ [10]

[9] Eulero non scrive esplicitamente i limiti di integrazione ma li dichiara; l'integrale a primo membro è chiaramente nullo.

[10] In genere $\int \frac{x^{n-1+4k}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{n+2+4k}{n+4k}\int \frac{x^{n+3+4k}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

che possiamo sostituire ricorsivamente, appunto, nella precedente ed ottenere

$$\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+6}{n+4}\cdot\frac{n+10}{n+8}\cdot\frac{n+14}{n+12}\cdot\ldots\int\frac{x^{n+\infty}}{\sqrt{1-x^4}}dx$$ [11]

[Par.12] Sostituendo successivamente ad *n* i valori 1, 2, 3, … abbiamo la serie di relazioni

I. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{3}{1}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{11}{9}\cdot\frac{15}{13}\cdot\ldots\int\frac{x^{1+\infty}}{\sqrt{1-x^4}}dx = c$

II. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{4}{2}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{16}{14}\cdot\ldots\int\frac{x^{2+\infty}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{\pi}{4}$

III. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{5}{3}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{13}{11}\cdot\frac{17}{15}\cdot\ldots\int\frac{x^{3+\infty}}{\sqrt{1-x^4}}dx = a$

IV. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{6}{4}\cdot\frac{10}{8}\cdot\frac{14}{12}\cdot\frac{18}{16}\cdot\ldots\int\frac{x^{4+\infty}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}$ [12]

[Par.13] Ma tutti gli integrali che compaiono a secondo membro sono uguali tra loro, come dimostra la formula iniziale di ricorrenza laddove si assuma *n*=∞:

$$\int \frac{x^{\infty-1}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int\frac{x^{\infty+3}}{\sqrt{1-x^4}}dx$$ [13]

Possiamo pertanto dividere tra loro a piacere le quattro relazioni viste; ad esempio

$$\frac{\text{I.}}{\text{II.}} = \frac{4c}{\pi} = \frac{2\cdot 3}{1\cdot 4}\cdot\frac{6\cdot 7}{5\cdot 8}\cdot\frac{10\cdot 11}{9\cdot 12}\cdot\frac{14\cdot 15}{13\cdot 16}\cdot\frac{18\cdot 19}{17\cdot 20}\ldots$$

$$\frac{\text{I.}}{\text{III.}} = \frac{c}{a} = \frac{3\cdot 3}{1\cdot 5}\cdot\frac{7\cdot 7}{5\cdot 9}\cdot\frac{11\cdot 11}{9\cdot 13}\cdot\frac{15\cdot 15}{13\cdot 17}\cdot\frac{19\cdot 19}{17\cdot 21}\ldots$$

$$\frac{\text{I.}}{\text{IV.}} = 2c = \frac{3\cdot 4}{1\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 8}{5\cdot 10}\cdot\frac{11\cdot 12}{9\cdot 14}\cdot\frac{15\cdot 16}{13\cdot 18}\cdot\frac{19\cdot 20}{17\cdot 22}\ldots$$

---

[11] Oggi non scriveremmo mai «n^{∞}» ma adopereremmo il concetto di limite del prodotto, ma tant'è: "Lo scopo principale di Eulero era di catturare l'infinito".

[12] Proseguendo, si ottengono le stesse frazioni a meno della prima, da cui le relazioni già viste il corrispondenza della nota 7.

[13] Ancora un volo pindarico, qui si sottintende $\frac{\infty+2}{\infty} = 1$ con un "inconsapevole (?)" passaggio al limite.

$$\frac{\text{II.}}{\text{III.}} = \frac{\pi}{4a} = \frac{3\cdot 4}{2\cdot 5}\cdot\frac{7\cdot 8}{6\cdot 9}\cdot\frac{11\cdot 12}{10\cdot 13}\cdot\frac{15\cdot 16}{14\cdot 17}\cdot\frac{19\cdot 20}{18\cdot 21}\ldots$$

$$\frac{\text{II.}}{\text{IV.}} = \frac{\pi}{2} = \frac{4\cdot 4}{2\cdot 6}\cdot\frac{8\cdot 8}{6\cdot 10}\cdot\frac{12\cdot 12}{10\cdot 14}\cdot\frac{16\cdot 16}{14\cdot 18}\cdot\frac{20\cdot 20}{18\cdot 22}\ldots$$ [14]

$$\frac{\text{III.}}{\text{IV.}} = 2a = \frac{4\cdot 5}{3\cdot 6}\cdot\frac{8\cdot 9}{7\cdot 10}\cdot\frac{12\cdot 13}{11\cdot 14}\cdot\frac{16\cdot 17}{15\cdot 18}\cdot\frac{20\cdot 21}{19\cdot 22}\ldots$$

[Par.14] Queste formule sono molto più adatte per il calcolo numerico. Ad esempio la prima è anche

$$\frac{4c}{\pi} = \left(1+\frac{1}{2\cdot 1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot 5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6\cdot 9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8\cdot 13}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{10\cdot 17}\right)\ldots$$ [15]

mentre la quarta è

$$\frac{\pi}{4a} = \left(1+\frac{1}{1\cdot 5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3\cdot 9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5\cdot 13}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{7\cdot 17}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9\cdot 21}\right)\ldots$$ [16]

e la sesta

$$2a = \left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5\cdot 7}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{7\cdot 11}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9\cdot 15}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{11\cdot 19}\right)\ldots$$

[Par.15-20] Le serie per a e c ottenute nel Par.10, essendo a termini alterni, consentono di effettuare un comodo calcolo, basato sul fatto che se si ha una serie a segni alterni a termini decrescenti

A-A'+A''-A'''+A''''-A'''''+…

---

[14] Riconosciamo il prodotto infinito di Wallis per π.

[15] Concisamente $\frac{4c}{\pi} = \prod_{n=1}\left(1+\frac{1}{2n\cdot(4n-3)}\right)$.

[16] Suscettibile della stessa scrittura come prodotto infinito.

e si forma la serie delle differenze prime *A-A'=B*, *A'-A''=B'*, *A''-A'''=B''*, … e quella delle differenze seconde *B-B'=C*, *B'-B''=C'*, *B''-B'''=C''*, … e così via con differenze ulteriori, allora la somma della serie proposta sarà sempre

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{4}+\frac{C}{8}+\frac{D}{16}+\frac{E}{32}+\cdots$$

Tale proprietà consente il calcolo approssimato di *a* e *c*:

$c=\pi\cdot 0{,}417314\ldots=1{,}311031\ldots$[17]

$a=\pi\cdot 0{,}190687\ldots=0{,}599061\ldots$[18]

[Par.21-22] Maneggiando opportunamente le espressioni ottenute l Par.13 abbiamo che vale il seguente

Teorema I: nella curva considerata, caratterizzata dall'altezza BC=AD=1, dall'ampiezza AB=CD=*a* e sall'arco AMC=*c* allora il prodotto $ac=\pi/4$[19].

[Par.23-25] Sia $P=ys$ per cui $dP=yds+sdy$ e per integrazione $P=\int yds+\int sdy$.

Partendo dalla quadratura esplicita, effettuata tra 0 e 1 abbiamo che

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx=\frac{1}{2}$$

Inoltre, per la ricorrenza stabilita al Par.11

$$\int\frac{x^{n+3}}{\sqrt{1-x^4}}dx=\frac{n}{n+2}\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

abbiamo

---

[17] Tale valore è designato oggi con $\frac{\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}{4}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$ (integrali … euleriani). Si tratta della lunghezza dell'arco di lemniscata nel primo quadrante.

[18] Tale valore è designato oggi con $\frac{\beta\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)}{4}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$.

[19] Siamo di fronte ad una delle gemme euleriane: $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx\cdot\int\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx=\frac{\pi}{4}$ laddove si assumano tutti gli integrali estesi tra 0 e 1. Nell'articolo viene erroneamente scritto AC invece di *ac*.

$$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{4}{6}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^{11}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{8}{10}\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^{15}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{12}{14}\int \frac{x^{11}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}$$

Per cui, utilizzando lo sviluppo di *y* ottenuto in Par. 6 e l'elemento d*s* in Par.1-4

$$\int yds = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 15}+\frac{1}{9\cdot 19}+\cdots\right)$$

Mentre, utilizzando lo sviluppo di *s* ottenuto in Par. 6 e l'elemento d*y* in Par.1-4

$$\int sdy = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{7\cdot 13}+\frac{1}{9\cdot 17}+\frac{1}{11\cdot 21}\ldots\right)$$

che sommiamo per ottenere

$$P = ys = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 13}+\frac{1}{7\cdot 15}\ldots\right)$$

che possiamo manipolare per ottenere, raggruppando i termini a due a due,

$$P = ys = \frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{13\cdot 15}+\frac{1}{17\cdot 19}+\cdots$$

Ma ciascun prodotto è la differenza di due frazioni di numeratore unitario e di denominatori pari ai due fattori:

$$P = ys = \left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\cdots$$

che è la serie di Leibnitz, per cui $P=ys=\pi/4$.

Determinazione di proprietà più astratte della curva. [par. 26-28]. Se $\Pi{:}z$ [20] indica il valore dell'integrale $\int \frac{dz(\alpha+\beta zz)}{\sqrt{1+mzz+nz^4}}$ che si annulla per z=0 allora siamo in grado di trovare altre proprietà di queste trascendenti. Se proponiamo due formule $\Pi{:}x$ e $\Pi{:}y$ tali che, attraverso le incognite x e y se ne ottenga una terza z nel modo seguente

$$z = \frac{x\sqrt{1+myy+ny^4}}{1-nxxyy} + \frac{y\sqrt{1+mxx+nx^4}}{1-nxxyy}$$

di modo che sarà

$$\sqrt{1+mzz+nz^4} = \frac{mxy+\sqrt{(1+mxx+nx^4)(1+myy+ny^4)(1+nx^2)+2nxy(xx+yy)}}{(1-nxxyy)^2}$$

Allora sarà sempre $\Pi{:}z = \Pi{:}x + \Pi{:}y + \beta xyz$ di modo che la quantità trascendente $\Pi{:}z$ supera la somma $\Pi{:}x + \Pi{:}y$ della quantità algebrica βxyz. Per i nostri scopi dobbiamo considerare m=0, n= -1; per gli archi α=1, β=0 e per le ordinate α=0, β=1. Se allora z indica l'ascissa l'ordinata corrispondente è $\Pi{:}z$ mentre l'arco è $\Theta{:}z$. Allora $\Pi{:}0=0$ come $\Theta{:}0=0$, mentre $\Pi{:}1=AB=a$ e $\Theta{:}1=CA=c$. È da notare che, se si assumono anche ascisse negative per z, abbiamo $\Pi(-z) = -\Pi(z)$ e $\Theta(-z) = -\Theta(z)$. Possiamo quindi affrontare il seguente

Problema I: *Siano dati nella nostra curva elastica due archi* CX *e* CY*, trovare l'arco* CZ *che sia pari alla somma CX+CY di tali due archi.*

Soluzione [Par. 29] Si chiamino le ascisse corrispondenti agli archi $Cx=x$, $Cy=y$ e $Cz=z$, le corrispondenti ordinate xX= $\Pi{:}x$, yY= $\Pi{:}y$, zZ= $\Pi{:}y$, gli archi CX= $\Theta{:}x$, CY= $\Theta{:}y$, CZ= $\Theta{:}y$. Poiché si chiede che sia $\Theta{:}z = \Theta{:}x+\Theta{:}y$, per la regola generale data sopra, poiché nel nostro caso β=0 in base ai valori x e y è necessario che sia

$$z = \frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+xxyy}$$ [21]

allora sarà

$$\sqrt{1-z^4} = \frac{(1-xxyy)+\sqrt{(1-x^4)(1-y^4)-2xy(xx+yy)}}{(1+xxyy)^2}$$

[Par. 30-33] Allo stesso modo in cui, date due ascisse x e y si determina la terza z, così se sono date le ascisse x e z si determina la terza y: $\Theta{:}y = \Theta{:}z - \Theta{:}x$, è evidente che qui y si determina allo stesso modo in cui, definite z e $-x$, abbiamo lavorato poc'anzi con le espressioni $+x$ e $+y$. Sarà quindi

[20] Oggi scriviamo $\Pi(z)$. Noi manterremo la notazione originale a meno che non comporti confusione.

[21] Riconosciamo la formula di addizione per l'integrale ellittico $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$.

$$y = \frac{z\sqrt{1-x^4}-x\sqrt{1-z^4}}{1+xxzz}$$

e quindi

$$\sqrt{1-y^4} = \frac{(1-xxzz)+\sqrt{(1-x^4)(1-z^4)+2xz(xx+zz)}}{(1+xxzz)^2}$$

Stesse formule se cerchiamo *x* dati *z* e *y*:

$$x = \frac{z\sqrt{1-y^4}-y\sqrt{1-z^4}}{1+yyzz}$$

e quindi

$$\sqrt{1-x^4} = \frac{(1-yyzz)+\sqrt{(1-y^4)(1-z^4)+2yz(yy+zz)}}{(1+yyzz)^2}$$

Si può esprimere in maniera più compatta l'insieme delle relazioni che legano tra loro le tre quantità *x*, *y*, *z*: ad esempio, quadrando l'espressione per *z*:

$$zz = \frac{(xx+yy)(1-xxyy)+2xy\sqrt{(1-x^4)(1-y^4)}}{(1+xxyy)^2}$$

Utilizzando il valore ottenuto per $\sqrt{1-z^4}$ abbiamo che

$$\sqrt{(1-x^4)(1-y^4)} = \frac{(1+xxyy)^2+\sqrt{(1-z^4)+2yz(xx+yy)}}{1-xxyy}$$

che sostituiamo nella precedente per avere

$$zz(1-xxyy) = xx + yy + 2xy\sqrt{1-z^4}$$

In maniera simile dai restanti due denominatori

$$yy(1-xxzz) = zz + xx - 2xz\sqrt{1-y^4}$$

$$xx(1-yyzz) = yy + zz - 2yz\sqrt{1-x^4}$$

Liberando dagli irrazionali otteniamo[22]

$$0 = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 + 2x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2) + x^4y^4z^4$$

Poiché tutte le quantità sono dei quadrati, la relazione vale sia per ascisse positive sia per ascisse negative.

Teorema II: [Par. 34-35] Se le tre ascisse C*x*=*x*, C*y*=*y*, C*z*=*z* sono tali che l'arco CZ eguagli la somma degli archi CX e CY allora le tre corrispondenti ordinate *x*X=Π:*x*, *y*Y=Π:*y*, *z*Z=Π:*z* saranno nella relazione

$$\Pi: z = \Pi: x + \Pi: y + xyz$$

ovvero

$$zZ = xX + yY + \frac{Cx \cdot Cy \cdot Cz}{CB^2}$$

[Par. 36] Dal momento che i caratteri Θ:*z* e Π:*z* denotano delle funzioni trascendenti[23] dell'ascissa *z*, visto che esse non possono essere espresse né mediante funzioni circolari né logaritmi dato che sono definite dalle espressioni integrali $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ e $\frac{zzdz}{\sqrt{1-z^4}}$ gioverà esprimere tali valori attraverso serie infinite, allora nella prima modalità avremo

$$\Theta: z = z + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}z^9 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{13}z^{13} + \cdots$$

$$\Pi: z = \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}z^7 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{11}z^{11} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{15}z^{15} + \cdots$$

o nella seconda modalità

$$\Theta: z = \left(z + \frac{3}{5}z^5 + \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}z^9 + \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{13}z^{13} + \cdots\right)\sqrt{1-z^4}$$

$$\Pi: z = \left(\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}z^7 + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}z^{11} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{13}{15}z^{15} + \cdots\right)\sqrt{1-z^4}$$

---

[22] Sono state introdotte le notazioni esponenziali abbreviate del tipo x^2 invece di *xx*.

[23] Le funzioni Θ e Π sono esprimibili come ipergeometriche, rispettivamente, nella seconda modalità, $\Theta: z = z\,{}_2F_1\left(1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}; z^4\right)\sqrt{1-z^4}$ e $\Pi: z = z^3\,{}_2F_1\left(1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; z^4\right)\sqrt{1-z^4}$

Problema: *Determinare in maniera più accurata gli elementi principali della nostra curva elastica, ossia la larghezza* AB=*a e l'intero arco* CA=*c rispetto all'altezza* CB=1.

Soluzione [Par. 37]: A tal fine assumiamo per il punto Z il vertice A, di modo che sarà *z*=1. Avremo

$$\Pi: z = \mathrm{AB} = a \qquad \text{e} \quad \Theta: z = \mathrm{CA} = c$$

di conseguenza $\sqrt{1-z^4} = 0$. Si cercano due archi CX e CY la cui somma uguagli l'arco CA=*c*. Poste le ascisse C*x*=*x* e C*y*=*y* per il Par. 31 sarà

$$1 - xx - yy - xxyy = 0$$

da cui conseguenza $yy = \frac{1-xx}{1+xx}$. Calcolando in questo modo *y* in funzione di *x* sarà $\Theta: x + \Theta: y = c$ e dal momento che $\Pi: z = a$ sarà $a = \Pi: x + \Pi: y + xy$.

[Par. 38-39]: Al fine di rendere le serie per Θ e Π il più rapidamente convergenti consideriamo il caso *x*=*y* che determina $x = y = \sqrt{-1+\sqrt{2}}$ la cui irrazionalità rende il valore poco idoneo al calcolo della serie. Pertanto poniamo *xx*=1/2 da cui *yy*=1/3 da cui *x*=1/√2 e *y*=1/√3 da cui le serie

$$\Theta: x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^6} + \cdots\right)$$

$$\Pi: x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{2^6} + \cdots\right)$$

E così per *y*

$$\Theta: y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^6} + \cdots\right)$$

$$\Pi: y = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{3^6} + \cdots\right)$$

Serie che convergono abbastanza rapidamente e permettono calcoli accurati come mostrato in *Acta Acad. Imp. Sc. Tom. VI. P.II.*

Problema III: *Dato un qualsiasi arco* PQ *della curva elastica, a partire da un punto* R *trovare l'arco* RS *uguale all'arco dato* PQ.

Soluzione [Par. 40]: Poiché vanno considerati quattro punti P, Q, R, S indichiamo le corrispondenti ascisse con C*p*=*p*, C*q*=*q*, C*r*=*r*, C*s*=*s*.

Per brevità indichiamo le quantità irrazionali con $\sqrt{1-p^4}=P$, $\sqrt{1-q^4}=Q$, $\sqrt{1-r^4}=R$, $\sqrt{1-s^4}=S$. Posto ciò, poiché l'arco RS deve essere uguale all'arco PQ deve essere CS-CR=CQ-CP che vuole dire $\Theta{:}\,s-\Theta{:}\,r=\Theta{:}\,q-\Theta{:}\,p$ ricerchiamo un arco $\Theta{:}\,v$ tale che sia $\Theta{:}\,v=\Theta{:}\,q-\Theta{:}\,p$ e per quanto visto

$$v=\frac{qP-pQ}{1+ppqq}$$

da cui

$$\sqrt{1-v^4}=V=\frac{(1-ppqq)PQ+2pq(pp+qq)}{(1+ppqq)^2}$$

Deve essere $\Pi{:}\,s=\Pi{:}\,r+\Pi{:}\,v$ e per lo stessa regola $s=\frac{rV+vR}{1+rrvv}$ da cui subito

$$\mathrm{S}=\frac{(1-rrvv)RV-2rv(rr+vv)}{(1+rrvv)^2}$$

Sostituendo i valori trovati per *v* e V, le espressioni esplicite di PP e QQ e quella per il numeratore *r*V+*v*R otteniamo per l'ascissa *s*

$$s=\frac{r(1-ppqq)PQ+2pqr(pp+qq)+(qPR-pQR)(1+ppqq)}{(1+ppq)^2+rr(pp+qq)(r-ppqq)-2pqrrPQ}$$

Sorvoliamo il calcolo esplicito di S.

[Par. 41-42] Il modo in cui *p*, *q*, *r* entrano nell'equazione e la relazione $\Theta{:}\,s=\Theta{:}\,r+\Theta{:}\,q-\Theta{:}\,p$ consentono di manipolare l'espressione di *s* ottenuta in funzione della permutabilità di *p*, *q*, *r* stessi. Si possono ottenere altre due relazioni in cui si scambiano *q* con –*p* e -*q* con *p* che naturalmente forniscono lo stesso valore.

[Par. 43] Occorre qui una importante questione analitica relativa a quale maniera in cui quelle tre espressioni debbano essere trattate per implicare una perfetta permutabilità tra *p*, *q*, *r*. Si capisce facilmente che se le si moltiplicano tra loro, si ottiene s^3 e sia al numeratore sia al denominatore le tre variabili giocano lo stesso ruolo.

Soluzione [Par. 44]: Per la generica tipologia di curva elastica, ad una data ascissa z corrispondono l'ordinata $= \int \frac{dz(\alpha+\beta zz)}{\sqrt{1-(\alpha+\beta zz)^4}}$ e l'arco $= \int \frac{dz}{\sqrt{1-(\alpha+\beta zz)^4}}$ [24] allora sono applicabili tutte le formule ottenute in precedenza in quanto il radicando può essere ricondotto alla forma $\sqrt{1+mzz+nz^4}$ con l'avvertenza che sia $\alpha\alpha$>1 e lo studio delle curve elastiche oblique si riconduce a quello dell'elastica rettangola.

[24] Nell'articolo al denominatore compare erroneamente la seconda e non la quarta potenza in entrambe le formule.