Due semplici curve a confronto

Carmine Suriano (2018)

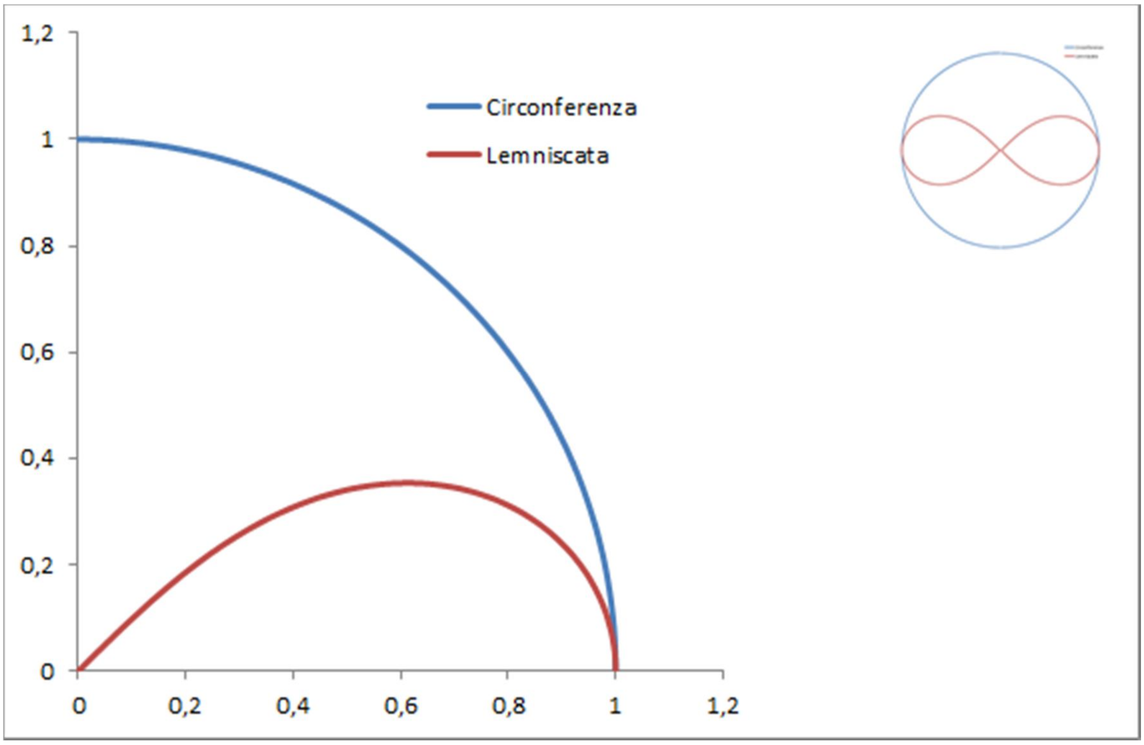
Consideriamo raffrontandole tra loro due curve molto note, la prima addirittura familiare: la circonferenza (γ) e la lemniscata di Bernoulli (λ).

Per rendere il confronto il più omogeneo possibile facciamole passare entrambe per il punto (1,0) centrandole nell'origine degli assi, cartesiani o polari che siano. Avremo le loro equazioni così scritte

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \rho^2 = \cos 2\theta \end{cases} \tag{1}$$

dove per ovvi motivi abbiamo utilizzato la rappresentazione polare, più adatta di quella cartesiana.

Per quanto possano essere note, le mettiamo qui a confronto grafico restringendo lo sguardo al primo quadrante



La lettura di un qualsiasi testo parla delle grandezze associate alla circonferenza come «elementari» mentre definisce le analoghe relative alla lemniscata come «non elementari». Cercherò di sfatare questa discriminazione parlando di ciascuna di essa in maniera comparativa. Riferendoci a una qualsiasi grandezza apporremo il pedice γ per la circonferenza e λ per la lemniscata.

- L'area

In coordinate polari l'area compresa tra una curva e l'asse polare, che coincide con l'asse cartesiano delle ascisse è dato da

$$A = \frac{1}{2}\int \rho^2 d\theta \qquad [2]$$

per cui è

$$\begin{cases} A_\gamma = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi \\ A_\lambda = 2\int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta = 1 \end{cases} \qquad [3]$$

Possiamo senza alcuna ombra di dubbio asserire che la lemniscata è quadrabile mentre la circonferenza non lo è affatto. Nella gara di "elementarità": lemniscata 1 – circonferenza 0. Nonostante le sue curve arcuate e un raggio variabile di punto in punto, la lemniscata è equivalente al quadrato unitario, la circonferenza non equivale ad alcun quadrato né razionale né algebrico.

- Il perimetro

Sempre in coordinate polari il perimetro compreso tra due punti appartenenti a una curva è dato da

$$P = \int \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 d\theta} \qquad [4]$$

per cui è

$$\begin{cases} P_\gamma = 4\int_0^{\pi/2} d\theta = 2\pi \\ P_\lambda = 4\int \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2} = 4\int \sqrt{d\rho^2 + \frac{\rho^4 d\rho^2}{1-\cos^2 2\theta}} = 4\int_0^1 \sqrt{d\rho^2 + \frac{\rho^4 d\rho^2}{1-\rho^4}} \end{cases}$$

ed infine

$$P_\lambda = 4\int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}$$

D'altra parte, in coordinate cartesiane, dal momento che $x^2 + y^2 = 1$ e

$$P_\gamma = 4\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = 4\int \sqrt{dx^2 + \frac{x^2}{y^2}dx^2} = 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{y^2}}dx = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

E la simiglianza tra le due espressioni diventa immediata, assieme al significato delle costanti che le rappresentano

$$\begin{cases} P_\gamma = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\pi \\ P_\lambda = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx = 2\varpi \end{cases} \quad [5]$$

La lunghezza dell'arco di lemniscata non è più "esotico" di quanto lo sia quella dell'arco di circonferenza. Nel primo caso la costante ϖ gioca lo stesso ruolo che il più familiare π assume per il secondo.

Siamo abituati a vedere il simbolo π sulle nostre calcolatrici tascabili. Se premiamo il tasto relativo compare

$$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ldots$$

Se trovassimo anche il simbolo ϖ ci abitueremmo, premendolo, a vedere scritto il valore

$$\varpi = 2.622\ 057\ 554\ 292\ 119\ 810\ 464\ 838\ldots$$

e credo che non ci vedremmo nulla di più trascendentale (!) nel secondo numero rispetto al primo.

i due numeri sono suscettibili di sviluppi in serie molto simili tra loro

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}$$

$$\frac{\varpi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(4n+1)(2n)!!}$$

Aggiorniamo il risultato della "elementarità": lemniscata 2 – circonferenza 1.

- Luogo geometrico

La circonferenza è il luogo di tutti i punti del piano la cui distanza da un punto, detto centro, è la medesima. Tale distanza si chiama anche raggio della circonferenza. Se r =1 allora per la formula pitagorica della distanza abbiamo

$$\gamma: \quad x^2 + y^2 = 1$$

La lemniscata da parte sua è è il luogo di tutti i punti del piano il prodotto delle cui distanze da due punti, detti fuochi, è il medesimo, se i fuochi hanno coordinate $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ abbiamo

$$\lambda: \quad \sqrt{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2}\cdot\sqrt{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2}=\frac{1}{2}$$

dal che, espandendo, semplificando ed elidendo otteniamo l'equazione cartesiana

$$\lambda: \quad (x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$$

che differisce da quella della circonferenza esclusivamente per il cambio di segno a secondo membro. Aggiorniamo ancora il risultato della "elementarità": lemniscata 3 – circonferenza 2.

- Funzioni sulla curva

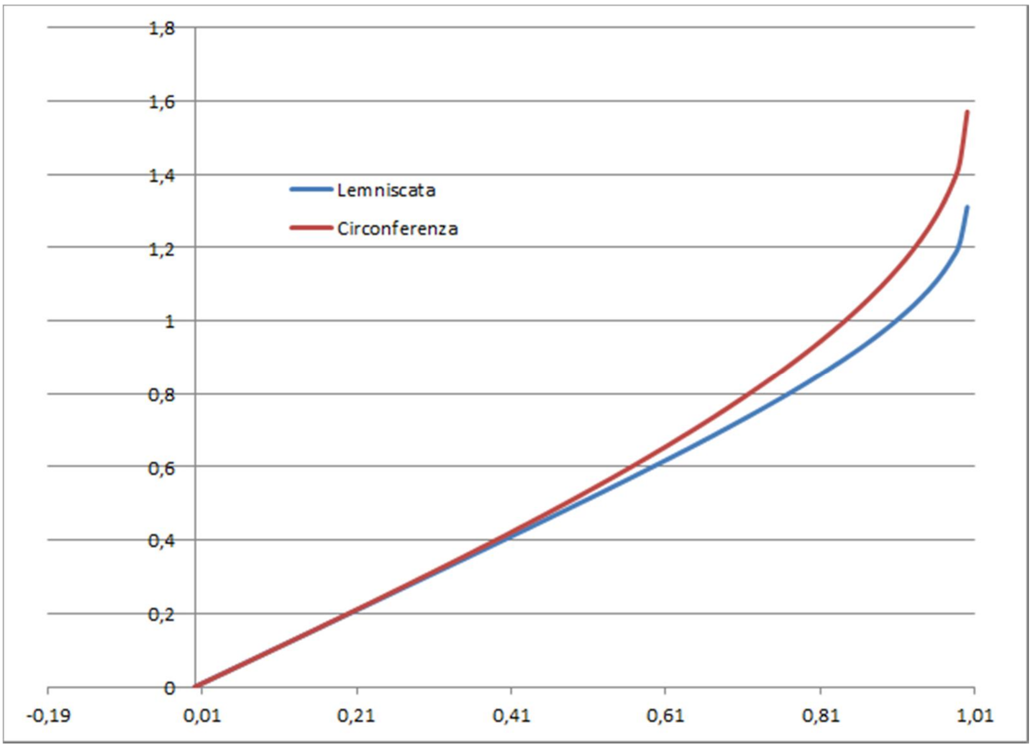
Consideriamo gli integrali [5] nei quali consideriamo variabile l'estremo superiore di integrazione:

$$\begin{cases} \varphi_\gamma = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ \psi_\lambda = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx \end{cases} \qquad [6]$$

Verranno definite due nuove funzioni φ, ψ dell'estremo superiore variabile *t*, di esse per semplicità abbiamo differenziato il nome per omettere il pedice che le associa rispettivamente alla circonferenza e alla lemniscata. Avremo quindi le funzioni dirette

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(t) \\ \psi = \psi(t) \end{cases} \qquad [7]$$

di cui mostriamo i grafici nell'intervallo di definizione



Le funzioni sono completamente invertibili, è possibile quindi definire due nuove funzioni, che sono le inverse delle [7]

$$\begin{cases} t_\gamma = \varphi^{-1}(t) \\ t_\lambda = \psi^{-1}(t) \end{cases} \tag{8}$$

Ora capita che la prima di esse ci è molto familiare per il semplice fatto che sulla grande maggioranza delle calcolatrici c'è il tastino che ce ne mostra il valore, mentre per la seconda non vi è nessun tasto. Ma ciò non cambia naturalmente la sostanza, se diamo loro il nome ormai assodato nella letteratura, tutto diverrà meno misterioso:

$$\begin{cases} t_\gamma = \varphi^{-1}(t) = \operatorname{sen} t \\ t_\lambda = \psi^{-1}(t) = \operatorname{sl} t \end{cases} \tag{9}$$

Dove riconosciamo immediatamente la "funzione seno [circolare]" e, meno, la "funzione seno [lemniscato]".

Stabilito questo fatto, (ri)scopriamo le tante analogie fra le due funzioni [9]. Ricorriamo ad Eulero il quale per primo mostrò che, dato un polinomio biquadratico $P(x)$, vale la formula di addizione dei relativi integrali:

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{1+mx^2+nx^4}} + \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1+mx^2+nx^4}} = \int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{1+mx^2+nx^4}}$$

a condizione che sia

$$\delta = \frac{\alpha\sqrt{1+m\beta^2+n\beta^4}+\beta\sqrt{1+m\alpha^2+n\alpha^4}}{1-n\alpha^2\beta^2} \qquad [10]$$

Nel caso della circonferenza abbiamo *m*= -1, *n*=0; per la lemniscata è *m*= 0, *n*= -1; allora abbiamo le formule di addizione

$$\begin{cases} \delta_\gamma = \frac{\alpha\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha^2}}{1} \\ \delta_\lambda = \frac{\alpha\sqrt{1-\beta^4}+\beta\sqrt{1-\alpha^4}}{1+\alpha^2\beta^2} \end{cases} \qquad [11]$$

Agli archi corrispondono le formule di addizione per i seni:

$$\begin{cases} t_\gamma(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\beta}+\mathrm{sen}\,\beta\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\alpha} \\ t_\lambda(\alpha+\beta) = \mathrm{sl}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{sl}\,\alpha\sqrt{1-\mathrm{sl}^4\beta}+\mathrm{sl}\,\beta\sqrt{1-\mathrm{sl}^4\alpha}}{1+\mathrm{sl}^2\alpha\,\mathrm{sl}^2\beta} \end{cases} \qquad [12]$$

Sempre dalle [5] abbiamo pure che, essendo

$$\begin{cases} ds_\gamma = \dfrac{d\varphi(s)}{\sqrt{1-\varphi^2(s)}} \\ ds_\lambda = \dfrac{d\varphi(s)}{\sqrt{1-\varphi^4(s)}} \end{cases}$$

si ha che le derivate $d\varphi/ds$ sono

$$\begin{cases} \varphi'_\gamma = \sqrt{1-\varphi^2} \\ \varphi'_\lambda = \sqrt{1-\varphi^4} \end{cases} \qquad [13]$$

e le formule di addizione si scrivono in maniera più compatta come

$$\begin{cases} \mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\, d(\mathrm{sen}\,\beta) + \mathrm{sen}\,\beta d(\mathrm{sen}\,\alpha) \\ \mathrm{sl}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{sl}\,\alpha\, d(\mathrm{sl}\,\beta)+\mathrm{sl}\,\beta\, d(\mathrm{sl}\,\alpha)}{1+\mathrm{sl}^2\alpha\,\mathrm{sl}^2\beta} \end{cases} \qquad [14]$$

dove riconosciamo subito che

$$\begin{cases} d(\mathrm{sen}\,t) = \cos t \\ d(\mathrm{sl}\,t) = \mathrm{cl}\,t \end{cases} \qquad [15]$$

I valori per gli archi speciali sono presto scritti, quindi:

$$\begin{cases} \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = \mathrm{sl}\,\frac{\varpi}{2} = 1 \\ \cos\,\frac{\pi}{2} = \mathrm{cl}\,\frac{\varpi}{2} = 0 \end{cases} \qquad [16]$$

Mentre le formule di complementarità sono

$$\begin{cases} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t \\ \text{sl}\left(\frac{\varpi}{2}-t\right)=\text{cl}\, t \end{cases} \qquad [17]$$

Quelle pitagoriche

$$\begin{cases} \text{sen}^2 t+\cos^2 t=1 \\ \text{sl}^2 t+\text{cl}^2 t+\text{sl}^2 t\cdot\text{cl}^2 t=1 \end{cases} \qquad [18]$$

di modo che è, per le [17],

$$\begin{cases} \text{sen}\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.70710678118655 \\ \text{sl}\,\frac{\varpi}{4}=\text{cl}\,\frac{\varpi}{4}=\sqrt{\sqrt{2}-1}\approx 0.64359425290558 \end{cases}$$

e

$$\frac{\text{sen}\frac{\pi}{4}}{\text{sl}\frac{\varpi}{4}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\approx 1.098684113$$

In gradi sessagesimali $\frac{\pi}{4}\approx 45°$ mentre $\frac{\varpi}{4}=37°\,33'.55''$.

Dalle formule di addizione [12] otteniamo immediatamente quelle di duplicazione

$$\begin{cases} \text{sen}\,(2\alpha)=2\text{sen}\,\alpha\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} \\ \text{sl}\,(2\alpha)=\frac{2\text{sl}\,\alpha\sqrt{1-\text{sl}^4\alpha}}{1+\text{sl}^4\alpha} \end{cases} \qquad [19]$$

usando i semiarchi

$$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha=2\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}} \\ \text{sl}\,\alpha=\frac{2\text{sl}\,\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\text{sl}^4\frac{\alpha}{2}}}{1+\text{sl}^4\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\text{sl}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{cl}\,\frac{\alpha}{2}}{1+\text{sl}^2\frac{\alpha}{2}\,\text{cl}^2\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

Nella prima di queste due poniamo $y=\text{sen}\,\alpha$, $x=\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$ allora abbiamo

$$y^2=4x^2(1-x^2)$$

e quindi otteniamo la ben nota $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{2}}$.

Analogamente nella seconda delle due poniamo $u = \text{sl}\,\alpha$, $z = \text{sl}\frac{\alpha}{2}\ \text{cl}\frac{\alpha}{2}$ allora abbiamo

$$u = \frac{2z}{1+z^2}$$

che, risolta per z, dà $z = \frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}$ ovvero, ripristinando le variabili originarie

$$\begin{cases} \text{sen}\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}{2}} \\ \text{sl}\frac{\alpha}{2}\ \text{cl}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\sqrt{1+\text{sl}^2\alpha}}{\text{sl}\,\alpha} \end{cases}$$

Ma dalla relazione pitagorica [18] per la lemniscata è

$$\text{cl}^2\tau = \frac{1-\text{sl}^2\tau}{1+\text{sl}^2\tau}$$

Per cui

$$\text{sl}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\sqrt{1+\text{sl}^2\alpha}}{\text{sl}\,\alpha}\sqrt{\frac{1+\text{sl}^2\alpha}{1-\text{sl}^2\alpha}}$$

ed infine

$$\begin{cases} \text{sen}\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}{2}} \\ \text{sl}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\text{sl}^2\alpha+\sqrt{1+\text{sl}^2\alpha}}{\text{sl}\,\alpha\sqrt{1-\text{sl}^2\alpha}} \end{cases} \qquad [20]$$

Esse ci dicono che la bisezione dell'arco di lemniscata, così come quello dell'arco di circonferenza, è realizzabile mediante l'uso dei soli riga e compasso. In effetti

Aggiorniamo quindi il risultato della "elementarità": lemniscata 4 – circonferenza 3.

- Integrali delle reciproche

Possiamo senz'altro calcolare gli integrali, tra gli stessi estremi, delle reciproche delle funzioni viste in [5] e cioè

$$\begin{cases} R_\gamma = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \\ R_\lambda = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx \end{cases}$$

Lavoriamo per parti; nel primo caso

$$R_\gamma = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left.\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{4} = \frac{P_\gamma}{8}$$

nel secondo caso

$$R_\lambda = \int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx = x\sqrt{1-x^4}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx = 2\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

ma

$$R_\lambda = \int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx = \int_0^1 \frac{1-x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx = P_\lambda - \frac{R_\lambda}{2}$$

ossia

$$R_\lambda = \frac{2}{3}P_\lambda = \frac{1}{3}\varpi \approx 0.87401918476413$$

Riscriviamo per confronto

$$\begin{cases} R_\gamma = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}P_\gamma \approx 0.785 \\ R_\lambda = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx = \frac{\varpi}{3} = \frac{2}{3}P_\lambda \approx 0.874 \end{cases} \qquad [21]$$

e vale

$$\frac{R_\gamma}{R_\lambda} = \frac{3\pi}{4\varpi} \approx 0.8986051760516\ldots = \frac{1}{1.11283578889888\ldots} = p_{2;4}$$

Tale costante appare nella teoria dei numeri in maniera straordinaria: se $U(x)$ è il numero di primi non superiori a x che si possono esprimere come $a^2 + b^4$ allora vale il limite asintotico

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{4}}} U(x) = \frac{1}{p_{2;4}} = \frac{4\varpi}{3\pi}$$

Aggiorniamo il punteggio: lemniscata 5 – circonferenza 4.

- Integrali ellittici

Nella formulazione di Jacobi, la funzione seno amplitudine sn(u) si ottiene invertendo l'integrale ellittico di prima specie

$$s(u;k) = \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad [22]$$

di modo che sn(u)=r(s). Le nostre funzioni non sono altri che casi particolari della [22], ossia

$$\begin{cases} \operatorname{sen} t = \operatorname{sn}(u;k=0) \\ \operatorname{sl} t = \operatorname{sn}(u;k=i) \end{cases} \qquad [23]$$

Questa "piccola" ma importante differenza ci dà il risultato finale della partita: al 90° (guarda caso) lemniscata 5 – circonferenza 5.

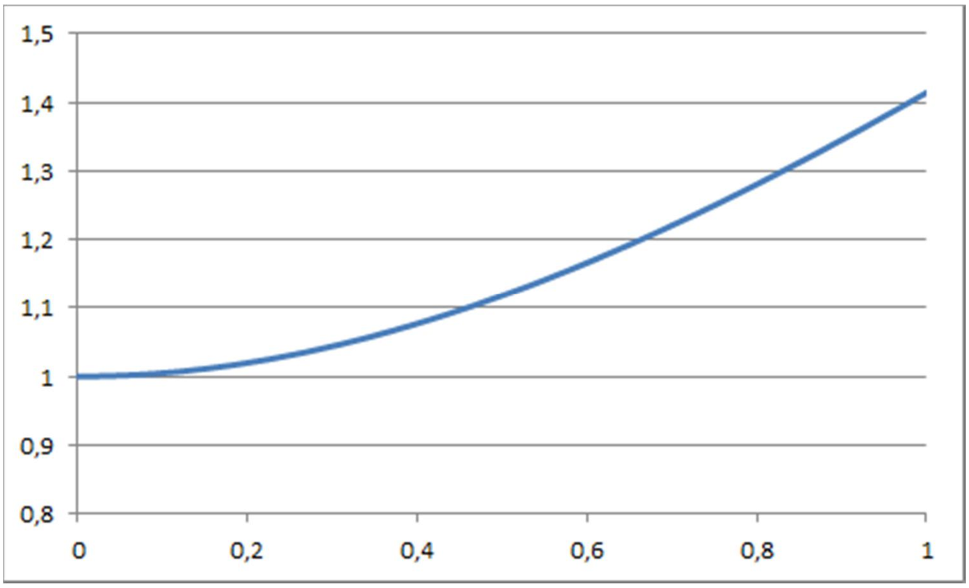
Dopo aver giocato la partita possiamo effettuare qualche considerazione.

- Il rapporto tra le nostre due costanti è un numero piuttosto curioso, che ha anche un simbolo: M

$$\frac{\varpi}{\pi} = \frac{1}{M} = \frac{1}{agm(1,\sqrt{2})} \approx 0.834\,626\,841\,6\ldots = \frac{1}{1.198\,140\,234\,7\ldots} \qquad [24]$$

dove chiaramente $agm(1,\sqrt{2})$ è la media aritmetico-geometrica tra 1 e $\sqrt{2}$.

Il rapporto tra gli elementi di lunghezza presi dalla [5] è una funzione dell'ascissa, esso varia tra 1 nell'origine e $\sqrt{2}$ nell'estremo 1, avendo un andamento grafico qui rappresentato



La funzione che rappresenta tale rapporto ha uno sviluppo in serie interessante:

$$\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2^3} + \frac{x^6}{2^4} - \frac{5x^8}{2^7} + \frac{7x^{10}}{2^8} \dots$$

Il suo reciproco è

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{2^3} - \frac{5x^6}{2^4} + \frac{35x^8}{2^7} - \frac{63x^{10}}{2^8} \dots$$

mentre

$$\int_0^1 \frac{ds_\gamma}{ds_\lambda} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{\sqrt{2} + \log\left(1+\sqrt{2}\right)}{2} \approx 1.1477935746963 \dots$$

- Oltre al prodotto tra integrali ellittici o iperellittici, è possibile stabilire una semplice relazione equivalente al rapporto tra gli integrali delle due nostre funzioni rispetto alle rispettive reciproche. Detta $f_\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $f_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ vogliamo trovare il valore di $\frac{\int_0^1 f_\alpha(x)dx}{\int_0^1 1/f_\alpha(x)dx}$ dove α vale γ e λ rispettivamente.

Calcoliamo prima il caso “circolare”. Integrando per parti abbiamo

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

D'altro canto, moltiplicando e dividendo l'integrando per sé stesso:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Dalla precedente ricaviamo il valore dell'ultimo integrale, che sostituiamo in questa e abbiamo

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

per cui

$$2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

e quindi

$$\frac{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}{\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx} = 2$$

Nel caso della lemniscata il metodo è il medesimo: per parti

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx = x\sqrt{1-x^4}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx = 2\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

come pure

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx = \int_0^1 \frac{1-x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx - \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

che dà, sostituito nella precedente,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx$$

e infine

$$\frac{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx}{\int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx} = \frac{3}{2}$$

Il risultato ha validità generale, basta utilizzare un esponente k qualsiasi e adottare il medesimo metodo: calcolare lo stesso integrale in due modi: (i) integrazione e (ii) moltiplicando e dividendo l'integrando per se stesso per poi integrare separatamente i due addendi e confrontare i risultati tra loro; per tale motivo è possibile scrivere che

$$\frac{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^k}}dx}{\int_0^1 \sqrt{1-x^k}dx} = \frac{k+2}{k} \qquad [25]$$

Se $k = \frac{2}{t-1}$ il rapporto assume il valore t

$$\frac{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^{\frac{2}{t-1}}}}dx}{\int_0^1 \sqrt{1-x^{\frac{2}{t-1}}}\,dx} = t$$

che può essere reso uguale a qualsiasi numero reale diverso dall'unità.

- È inoltre possibile calcolare il rapporto tra altri tipi di integrali, ossia

$$\frac{\int_0^1 x^k\sqrt{1-x^p}\,dx}{\int_0^1 x^k/\sqrt{1-x^p}\,dx} = \frac{p}{2k+(p+2)}$$

Dal momento poi che è

$$\int_0^1 x^k\sqrt{1-x^p}\,dx = \int_0^1 \frac{x^k - x^{k+p}}{\sqrt{1-x^p}}dx$$

Abbiamo pure

$$\frac{p}{2k+(p+2)} = 1 - \frac{\int_0^1 \frac{x^{k+p}}{\sqrt{1-x^p}}dx}{\int_0^1 x^k/\sqrt{1-x^p}\,dx}$$

Per cui

$$\frac{\int_0^1 \frac{x^{k+p}}{\sqrt{1-x^p}}dx}{\int_0^1 x^k/\sqrt{1-x^p}\,dx} = \frac{2k+2}{2k+(p+2)}$$

- Il calcolo dei prodotti tra i detti integrali non è possibile in genere, a meno di casi particolari nei quali è possibile la quadratura dei singoli fattori, come in

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\,dx \cdot \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{\pi^2}{32}$$

- Il teorema egregio di Eulero permette invece il calcolo dei prodotti tra i seguenti integrali:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^{2q}}}dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{p+q-1}}{\sqrt{1-x^{2q}}}dx = \frac{\pi}{2pq}$$

In particolare abbiamo (g=2)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^4}}dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{\pi}{4p}$$

Donde la tabella seguente

p	$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{1-x^4}}$	$\int_0^1 \frac{x^{p+1}dx}{\sqrt{1-x^4}}$	$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^4}}dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{\sqrt{1-x^4}}dx$
1	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) \approx 1.31103$	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) \approx 0.59907$	$\frac{\pi}{4}$
2	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{8}$
3	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) \approx 0.59907$	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right) \approx 0.43701$	$\frac{\pi}{12}$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{16}$
5	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right) \approx 0.43701$	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right) \approx 0.35944$	$\frac{\pi}{20}$
6	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{24}$

p	$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{1-x^4}}$	$\int_0^1 \frac{x^{p+1}dx}{\sqrt{1-x^4}}$	$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^4}}dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{\sqrt{1-x^4}}dx$
7	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right) \approx 0.35944$	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right) \approx 0.31215$	$\frac{\pi}{28}$
8	$\frac{1}{3}$	$\frac{3\pi}{32}$	$\frac{\pi}{32}$
9	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right) \approx 0.31215$	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{11}{4}\right) \approx 0.27957$	$\frac{\pi}{36}$
10	$\frac{3\pi}{32}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{\pi}{40}$
11	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{11}{4}\right) \approx 0.27957$	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{13}{4}\right) \approx 0.25540$	$\frac{\pi}{44}$
12	$\frac{4}{15}$	$\frac{5\pi}{64}$	$\frac{\pi}{48}$
13	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{13}{4}\right) \approx 0.25540$	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{15}{4}\right) \approx 0.23656$	$\frac{\pi}{52}$
14	$\frac{5\pi}{64}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{\pi}{56}$
15	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{15}{4}\right) \approx 0.23656$	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{17}{4}\right) \approx 0.22134$	$\frac{\pi}{60}$
16	$\frac{8}{35}$	$\frac{35\pi}{512}$	$\frac{\pi}{64}$
17	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{17}{4}\right) \approx 0.22134$	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{19}{4}\right) \approx 0.20873$	$\frac{\pi}{68}$
18	$\frac{35\pi}{512}$	$\frac{64}{315}$	$\frac{\pi}{72}$
19	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{19}{4}\right) \approx 0.20873$	$\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{21}{4}\right) \approx 0.19804$	$\frac{\pi}{76}$
20	$\frac{64}{315}$	$\frac{63\pi}{1024}$	$\frac{\pi}{80}$

Che mostra un andamento molto semplice da inferire.

Inoltre è (g=3)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^6}}dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{p+2}}{\sqrt{1-x^6}}dx = \frac{\pi}{6p}$$

Donde la tabella seguente

p	$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{1-x^6}}$	$\int_0^1 \frac{x^{p+2}dx}{\sqrt{1-x^6}}$	$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^6}}dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{p+2}}{\sqrt{1-x^6}}dx$
1	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right) \approx 1.21433$	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{4}{6}\right) \approx 0.43118$	$\frac{\pi}{6}$
2	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{2}{6}\right) \approx 0.70109$	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{5}{6}\right) \approx 0.37342$	$\frac{\pi}{12}$
3	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{18}$
4	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{4}{6}\right) \approx 0.43118$	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{7}{6}\right) \approx 0.30358$	$\frac{\pi}{24}$
5	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{5}{6}\right) \approx 0.37342$	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{8}{6}\right) \approx 0.28044$	$\frac{\pi}{30}$
6	$\frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{36}$
7	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{7}{6}\right) \approx 0.30358$	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{10}{6}\right) \approx 0.24639$	$\frac{\pi}{42}$
8	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{8}{6}\right) \approx 0.28044$	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{11}{6}\right) \approx 0.23339$	$\frac{\pi}{48}$
9	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{\pi}{54}$
10	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{10}{6}\right) \approx 0.24639$	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{13}{6}\right) \approx 0.21251$	$\frac{\pi}{60}$
11	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{11}{6}\right) \approx 0.23339$	$\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{14}{6}\right) \approx 0.20396$	$\frac{\pi}{66}$
12	$\frac{2}{9}$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{72}$

Ancora (g=3/2)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^3}}dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{p+1/2}}{\sqrt{1-x^3}}dx = \frac{\pi}{3p}$$

la tabella diventa

p	$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{1-x^3}}$	$\int_0^1 \frac{x^{p+1/2}dx}{\sqrt{1-x^3}}$	$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^3}}dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{p+1/2}}{\sqrt{1-x^3}}dx$
1	$\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \approx 1.40218$	$\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{5}{6}\right) \approx 0.74683$	$\frac{\pi}{3}$
2	$\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right) \approx 0.86237$	$\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{7}{6}\right) \approx 0.60716$	$\frac{\pi}{6}$
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{9}$
4	$\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right) \approx 0.56088$	$\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{11}{6}\right) \approx 0.46677$	$\frac{\pi}{12}$
5	$\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right) \approx 0.49278$	$\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{13}{6}\right) \approx 0.42501$	$\frac{\pi}{15}$
6	$\frac{4}{9}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{18}$
7	$\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{7}{3}\right) \approx 0.40791$	$\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{17}{6}\right) \approx 0.36675$	$\frac{\pi}{21}$
8	$\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{8}{3}\right) \approx 0.37905$	$\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{19}{6}\right) \approx 0.34532$	$\frac{\pi}{24}$
9	$\frac{16}{45}$	$\frac{5\pi}{48}$	$\frac{\pi}{27}$

L’immancabile (g=1)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^2}}dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{p}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2p}$$

la tabella diventa

p	$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int_0^1 \frac{x^p dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^2}}dx \cdot \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}}dx$
1	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$
2	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
3	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$
5	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{\pi}{105}$
6	$\frac{8}{15}$	$\frac{5\pi}{32}$	$\frac{\pi}{12}$
7	$\frac{5\pi}{32}$	$\frac{16}{35}$	$\frac{\pi}{14}$
8	$\frac{16}{35}$	$\frac{35\pi}{256}$	$\frac{\pi}{16}$
9	$\frac{35\pi}{256}$	$\frac{128}{315}$	$\frac{\pi}{18}$
10	$\frac{128}{315}$	$\frac{63\pi}{512}$	$\frac{\pi}{20}$

Infine (g=1/2)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x}}dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{p-1/2}}{\sqrt{1-x}}dx = \frac{\pi}{p}$$

con la relativa tabella

p	$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{1-x}}$	$\int_0^1 \frac{x^{p-1/2}dx}{\sqrt{1-x}}$	$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x}}dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{p-1/2}}{\sqrt{1-x}}dx$
1	2	$\frac{\pi}{2}$	π
2	$\frac{4}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
3	$\frac{16}{15}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{\pi}{3}$
4	$\frac{32}{35}$	$\frac{35\pi}{128}$	$\frac{\pi}{4}$
5	$\frac{256}{315}$	$\frac{35\pi}{128}$	$\frac{\pi}{5}$
6	$\frac{512}{693}$	$\frac{231\pi}{1024}$	$\frac{\pi}{6}$
7	$\frac{2048}{3003}$	$\frac{429\pi}{2048}$	$\frac{\pi}{7}$
8	$\frac{4096}{6435}$	$\frac{6435\pi}{32786}$	$\frac{\pi}{8}$

Esiste una gerarchia tra gli integrali, che porta anche a valori uguali tra loro, ad esempio

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{x^{1/2}dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}} = \int_0^1 \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{x^{13/2}dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{\pi}{8}$$