Cose serie … serie di cose

Quasi sempre si rimane stupefatti nel leggere l'espressione chiusa della somma di serie (infinite). In realtà possiamo catalogare le serie numeriche in diverse categorie a seconda del modo in cui si riesce a calcolarne la somma: avremo quindi

i. serie riconducibili a quella geometrica
ii. serie di tipo telescopico
iii. serie riconducibili a sviluppi di funzioni in polinomi
iv. serie di tipo euleriano

Nella presente nota ci occuperemo dell'ultima tipologia, seguendo gli insegnamenti del Maestro. Il nostro scrigno è costituito dalla *Introductio in Analysin Infinitorum*, tomo I; di conseguenza le serie colà trovate sono caratterizzate tutte dal fatto che la loro determinazione non fa affatto uso dell'analisi infinitesimale, bensì solo di quella, aritmetica, degli infiniti, ossia di espressioni i cui termini sono infiniti o in numero o in grandezza.

. 1 .

Dalla sezione 141, tenendo presenti due fatti ovvero che

[1] $$z = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \dots \pm \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \dots$$

e che se α, β sono due archi la cui somma è $\frac{\pi}{4}$

[2] $$\tan\beta = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

allora, nell'ipotesi che $0 < p < q$ e che le tangenti dei due archi siano i due numeri razionali $\tan\alpha = \frac{p}{q}$ e quindi $\tan\beta = \frac{q-p}{q+p}$ allora è

[3] $$\pi = 4\left\{\frac{1}{1}\left[\frac{p}{q} + \frac{q-p}{q+p}\right] - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \left(\frac{q-p}{q+p}\right)^3\right] \dots \pm \frac{1}{2n+1}\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{2n+1} + \left(\frac{q-p}{q+p}\right)^{2n+1}\right] \dots\right\}$$

Il caso limite è $p = q = 1$ che restituisce la lentissima serie di Leibnitz-McGregpry per $\frac{\pi}{4}$. Negli altri casi il calcolo è molto più efficiente.

Consideriamo il caso $p = 1$ allora $\frac{p}{q} = \frac{1}{q}$ e $\frac{q-p}{q+p} = \frac{q-1}{q+1}$ con il che

$$\pi = 4\left\{\frac{1}{1}\left[\frac{q^2+1}{q^2+q}\right] - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{q}\right)^3 + \left(\frac{q-1}{q+1}\right)^3\right] \dots \pm \frac{1}{2n+1}\left[\left(\frac{1}{q}\right)^{2n+1} + \left(\frac{q-1}{q+1}\right)^{2n+1}\right] \dots\right\}$$

che diventa, nel caso particolarissimo $q = 2$

$$[4] \qquad \pi = 4\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\cdot\frac{35}{216} + \frac{1}{5}\cdot\frac{275}{7776}\ldots \pm \frac{1}{2n+1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\right]\ldots\right\}$$

Con i primi tre termini si ottiene una approssimazione per π pari a $\frac{6115}{1944} \approx 3.145576\ldots$ a fronte della leibnitziana $\frac{52}{15} = 3.4\overline{6}$. La [4] è quella data da Eulero.

La questione diventa ora la seguente: tra tutte le coppie di valori (p, q) qual è la più efficiente ai fini del calcolo di π ?

Bene, sarà la tale che il primo termine in parentesi approssima meglio π: dobbiamo quindi rendere minima l'espressione, che sappiamo essere positiva, dato il comportamento a segni alterni della serie,

$$[5] \qquad \Delta(p,q) = \frac{p}{q} + \frac{q-p}{q+p} - \frac{\pi}{4}$$

Abbiamo

$$\frac{\partial\Delta}{\partial p} = -\frac{q^2-2pq-p^2}{q(q+p)^2}$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial q} = \frac{p(q^2-2pq-p^2)}{q^2(q+p)^2}$$

L'annullare le due derivate parziali prime dà una unica equazione

$$q^2 - 2pq - p^2 = 0 \quad \text{ovvero} \quad (q-p)^2 = 2p^2 \text{ e infine}$$

$$[6] \qquad q = \left(\sqrt{2}+1\right)p$$

che è la condizione di minimo. Allora la [5] è

$$\Delta\left(p, \left(\sqrt{2}+1\right)p\right) = \frac{2\sqrt{2}+4}{3\sqrt{2}+4} - \frac{\pi}{4} = \approx 0.043028961348742\ldots$$

La [6] costituisce una espressione irrazionale in q. Di conseguenza possiamo ottenere solo delle coppie approssimanti. Esse sono, in ordine crescente di numeratore,

$$(1,2) - (2,5) - (5,12) - (12,29) - (29,70) - \cdots (p_k, q_k) - \cdots$$

dove $p_1 = 1$; $q_1 = 2$ e

$$[7] \qquad \begin{cases} p_{k+1} = q_k \\ q_{k+1} = 2q_k + p_k \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{q_{k+1}}{q_k} = \sqrt{2}+1 = \lim_{k\to\infty}\frac{p_{k+1}}{p_k}$$

Se rinunciassimo alla condizione di razionalità allora avremmo che la serie più efficiente è

$$\pi = 4\left\{\frac{1}{1}\left[\frac{2\sqrt{2}+4}{3\sqrt{2}+4}\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{14\sqrt{2}+20}{99\sqrt{2}+140}\right] + \frac{1}{5}\left[\frac{82\sqrt{2}+116}{3363\sqrt{2}+4756}\right] - \frac{1}{7}\left[\frac{478\sqrt{2}+676}{114243\sqrt{2}+161564}\right] + \frac{1}{9}\left[\frac{2786\sqrt{2}+3940}{3880899\sqrt{2}+5488420}\right] \dots\right\}$$

Il termine generale è

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{a_n\sqrt{2} + b_n}{c_n\sqrt{2} + d_n}$$

Entrambi i coefficienti del numeratore obbediscono alla medesima legge di ricorrenza

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} + x_n$$

quelli del denominatore a

$$y_{n+2} = 34y_{n+1} + y_n$$

Le condizioni iniziali sono quelle viste.
En passant abbiamo ottenuto una curiosa approssimazione per $\frac{\pi}{4} : \frac{2\sqrt{2}+4}{3\sqrt{2}+4}$.

. 2 .

Dalla sezione 172, ritroviamo che, posto $k = \tan\frac{m\pi}{2n}$, è

[8] $$\frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \cdots \frac{1}{(2t+1)n-m} - \frac{1}{(2t+1)n+m} \dots = k\frac{\pi}{2n}$$

Una scelta opportuna dei valori di n, m $(1 < n > m)$ consente di sommare in forma chiusa la [8]. Poniamo $m = 1$, allora $k = \tan\frac{\pi}{2n}$, e

[9] $$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+1} + \cdots \frac{1}{(2t+1)n-1} - \frac{1}{(2t+1)n+1} \dots = k\frac{\pi}{2n}$$

Se $n = 3/2$ abbiamo che $k = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ e

$$\frac{1}{3-2}-\frac{1}{3+2}+\frac{1}{9-2}-\frac{1}{9+2}+\cdots\frac{1}{3(2t+1)-2}-\frac{1}{3(2t+1)+2}\dots=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

ossia

$$[10]\quad \frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\dots=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

Eulero dà le somme seguenti:

i. $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\dots=\frac{1}{4}\pi$ $\qquad (n=2)$

ii. $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\dots=\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$ $\qquad (n=3)$

Confrontando la [10] con la ii. si vede che

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\dots.=6\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$

Guardiamo la formazione delle due serie. In quella a primo membro, partendo dalla prima coppia, tutte sono del tipo

$$\frac{1}{(6n+1)}-\frac{1}{(6n+1)+4}$$

mentre in quella a secondo membro tutte le coppie sono del tipo

$$\frac{1}{(3n+1)}-\frac{1}{(3n+1)+1}$$

Se raggruppiamo queste in coppie di coppie abbiamo che la quadrupla generica è

$$\frac{1}{(6n+1)}-\frac{1}{(6n+1)+1}+\frac{1}{(6n+1)+3}-\frac{1}{(6n+1)+4}$$

e quindi che

$$\sum_{n=0}\frac{1}{(6n+1)}-\frac{1}{(6n+1)+4}=6\sum_{n=0}\frac{1}{(6n+1)}-\frac{1}{(6n+1)+1}+\frac{1}{(6n+1)+3}-\frac{1}{(6n+1)+4}$$

Più oltre, alla sezione 178, ci vengono date le

[11] $$\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\cdots\pm\frac{1}{tn-m}\mp\frac{1}{tn+m}\ldots=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

[12] $$\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\cdots-\frac{1}{tn-m}+\frac{1}{tn+m}\ldots=\frac{\pi}{n\tan\frac{m\pi}{n}}$$

Sommando la seconda alla prima abbiamo

[13] $$\frac{1}{m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}+\cdots-\frac{1}{2tn-m}+\frac{1}{2tn+m}\ldots=\frac{\pi}{2}\frac{1+\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{n\tan\frac{m\pi}{2n}}$$

Di nuovo nel caso $m=1$

[14] $$1-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}+\cdots-\frac{1}{2tn-1}+\frac{1}{2tn+1}\ldots=\frac{\pi}{2}\frac{1}{n\tan\frac{\pi}{2n}}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{nk}$$

Ad esempio, per $n=4$:

[15] $$\frac{1}{1}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\cdots-\frac{1}{8t-1}+\frac{1}{8t+1}\ldots=\frac{\pi}{8}\frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}}=\frac{\pi}{8(\sqrt{2}-1)}$$

. 3 .

Dalla sezione 182 otteniamo due vere gemme:

[16] $$\frac{1}{1-x}-\frac{1}{4-x}+\frac{1}{9-x}-\frac{1}{16-x}+\cdots\pm\frac{1}{n^2-x}\ldots=\frac{\pi\sqrt{x}}{2x\sin\pi\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}$$

[17] $$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{4-x}-\frac{1}{9-x}+\frac{1}{16-x}+\cdots\mp\frac{1}{n^2-x}\ldots=\frac{1}{2x}-\frac{\pi\sqrt{x}}{2x\tan\pi\sqrt{x}}$$

che possono essere sommate, di modo che:

[18] $$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{9-x}+\frac{1}{25-x}+\frac{1}{49-x}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2-x}\ldots=\frac{\pi\sqrt{x}\tan\frac{\pi\sqrt{x}}{2}}{4x}$$

oppure sottratte, per cui

[19] $$\frac{1}{4-x}+\frac{1}{16-x}+\frac{1}{36-x}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2-x}\ldots=\frac{1}{2x}-\frac{\pi\sqrt{x}}{4x\tan\frac{\pi\sqrt{x}}{2}}$$

Nel caso della [18] possiamo senz'altro porre $x=4$: ne viene che

$$[20] \quad \frac{1}{5}+\frac{1}{21}+\frac{1}{44}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2-4}\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-4}=\frac{1}{3}$$

Se facciamo $x = 16$ abbiamo

$$[21] \quad \frac{1}{9}+\frac{1}{33}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2-16}\ldots=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-16}=\frac{1}{15}+\frac{1}{7}=\frac{22}{105}$$

Se facciamo ancora $x = 36$ abbiamo

$$[21] \quad \frac{1}{7}+\frac{1}{45}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2-36}\ldots=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-36}=\frac{1}{35}+\frac{1}{27}+\frac{1}{11}=\frac{1627}{10395}$$

In generale, se $x = 4y^2$ $(y > 0)$ allora la tangente al secondo membro della [18] si annulla, quindi ci rimangono a sinistra un numero finito di termini negativi

$$\frac{1}{1-4y^2}+\frac{1}{9-4y^2}+\frac{1}{25-4y^2}+\cdots$$

fino a che sia $(2n+1)^2 > 4y^2$, che diventa il primo termine positivo, avremo quindi che

$$\sum_{n=y}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-4y^2}=\sum_{n=0}^{y-1}\frac{1}{4y^2-(2n+1)^2}$$

che è un numero razionale finito. Riassumiamo i primi valori:

y=1	2	3	4	5	6	7
$\frac{1}{3}$	$\frac{22}{105}$	$\frac{1627}{10395}$	$\frac{5692}{45045}$	$\frac{7759469}{72747675}$	$\frac{93044486}{1003917915}$	$\frac{2888008157}{35137127025}$

Nella [19] possiamo cominciare col porre $x = 1$: dal che

$$[22] \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2-1}\ldots=\frac{1}{2}$$

Se diciamo $x = 9$ abbiamo

$$[23] \quad \frac{1}{7}+\frac{1}{27}+\frac{1}{55}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2-9}\ldots=\frac{1}{18}+\frac{1}{5}=\frac{23}{90}$$

Se $x = 25$ abbiamo

$$[24] \quad \frac{1}{11}+\frac{1}{39}+\frac{1}{75}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2-25}\ldots=\frac{1}{50}+\frac{1}{21}+\frac{1}{9}=\frac{23}{90}$$

Se in generale $x = (2y+1)^2$ abbiamo, sempre considerando che il minuendo a destra si annulla, che dobbiamo considerare la disuguaglianza $(2n)^2 > (2y+1)^2$ ovvero $2n > 2y+1$ e quindi

$$\sum_{n=y+1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2-(2y+1)^2}=\frac{1}{2(2y+1)^2}+\sum_{n=1}^{y}\frac{1}{(2y+1)^2-(2n)^2}$$

che è di nuovo un numero razionale finito. Riassumiamo i primi valori:

y=0	2	3	4	5	6	7
$\frac{1}{2}$	$\frac{23}{90}$	$\frac{563}{3150}$	$\frac{1593269}{13783770}$	$\frac{31730711}{320089770}$	$\frac{3788707301}{43503109650}$	$\frac{340028535787}{4367042930250}$